厦门大学

博士学位论文

福建传统数学思想研究

姓名：刘秋华

申请学位级别：博士

专业：科学技术哲学

指导教师：郭金彬

20070401

内容摘要

数学思想是数学产生的思想依据和思想方法，也包括数学成果所蕴涵的思想精髓。中国传统数学思想的主体部分是由多个区域性数学思想交汇而成。研究中国各区域性数学思想对丰富和发展中国传统数学思想的研究，具有一定的意义。我们利用厦门大学所在的地域优势，对福建传统数学思想进行了系统的研究。本文是这个方面的成果。在结构上，本文分成主体和结论两个部分。在主体部分，本文深入剖析了福建传统数学史上的典型数学家和重大事件；在结论部分，本文以中国传统数学思想为参照，总结了福建传统数学思想的基本特色。

历史上，古代福建属于后开发地区。我们没有发现唐以前关于福建数学思想的史料。到了唐代，随着福建的广泛开发，福建的文化开始繁荣。福建的传统数学思想从唐、五代开始起步，此时的数学家有陈陶、黄岳、龚颖等人。

到了宋代，福建的传统数学思想达到了高潮。其中著名的数学家北宋有苏颂、阮逸等人，南宋有鲍澣之、蔡元定等人。苏颂运用数学知识，主持建造了水运仪象台，并写了《新仪象法要》一书介绍水运仪象台。阮逸著有《皇祐新乐图记》，蔡元定著有《律吕新书》，他们二人将数学和律吕之学结合起来。鲍澣之则在汀州刊刻了“算经十书”。

到了明代，福建的传统数学和中国的传统数学一样，骤然衰退，纯粹的理论数学一蹶不振。但此时实用数学却发展很快，其突出表现为珠算的兴起。著名的珠算家有徐心鲁和柯尚迁二人，前者著有《盘珠算法》，后者著有《数学通轨》。明清之际，西方数学传入我国，福建的传统数学开始受西方数学影响。从清初至清中叶，著名的数学家除了有以李光地为领袖的“安溪之学”的文人数学家群体，还有庄亨阳、陈际新等人。清初历算名家梅文鼎为康熙所赏识，离不开李光地的举荐。庄亨阳在为官之余，著有《庄氏算学》。陈际新师从明安图，他与他人合著《割圆密率捷法》，完成了“杜氏九术”的证明。在鸦片战争之后，随着洋务运动的兴起，洋务派在福州开办了福州船政学堂，其数学教学采用了西方工程教育的数学课程。和中国传统数学一样，福建的传统数学此时也逐渐融入到世界的主流数学之中。

以中国传统数学思想为参照，福建传统数学思想的基本特色可以凸现出来。作为中国传统数学思想的有机部分，一方面，它以中国传统数学思想为活水源头，反映了中国传统数学思想的某些特色；另一方面，它的发展具有相对的独立性，在其发展历程中表现出某种鲜明的区域性特点，从而作为中国传统数学思想之源而融入于其中。作为中国传统数学思想之流的福建传统数学思想主要表现为：1、数学与实际应用紧密结合。2、数学与天文历法的研究相结合。3、注重精密的数学计算。作为中国传统数学思想之源的福建传统数学思想主要表现为：1、鲍澣之在汀州刊刻“算经十书”。2、徐心鲁、柯尚迁的珠算。3、庄亨阳的中西算结合研究。4、陈际新的无穷级数研究。

关键词：福建；传统；数学思想

Abstract

Mathematical thought is the thought basis and the thinking method of the origination and development of mathematics, and it also includes the thought essence which mathematical achievement contains. The main body part of Chinese traditional mathematical thought was taken shape by the convergence of many regional mathematics thought .Studies on the various regional mathematics thought of China can enrich and develop the research of the Chinese traditional mathematical thought. As a result, it has certain values. We have conducted a comprehensive research on the traditional mathematical thought of Fujian by the regional superiority of Xiamen University. This paper is an achievement for it. In the structure, this paper is divided into two parts: the main body and the conclusion. In the main body, this paper thoroughly analyzed the mathematical thought of the typical mathematicians and the significant events in the traditional mathematics in Fujian ; in the conclusion, taking the Chinese traditional mathematical thought as the reference, this paper summarized the characteristics of the traditional mathematical thought in Fujian.

In the ancient times, Fujian belonged to the less-developed regions. We have not discovered any historical data about the mathematical thought in Fujian before the Tang Dynasty. In the Tang Dynasty, along with the widespread development in Fujian, Fujian's culture started to prosper. In Tang and the Five Dynasties lived mathematicians such as Chen Tao, Huang Yue and Gong Ying.

In Song Dynasty, Fujian's traditional mathematical thought had reached its apex. There lived renowned mathematicians such as Su Song, Ruan Yi in Northern Song Dynasty and Bao Huanzhi, Cai Yuanding in Southern Song Dynasty. Utilizing mathematical knowledge, Su Song had constructed an astronomical instrument named 'Shuiyunyixiangtai' and written a book named '*xinyixiangfayao*'. Ruan Yi wrote a book named '*huangyouxinyuetuji*', and Cai Yuanding wrote a book named '*luluxinshu*'. Both of them studied mathematics in connection with music. Bao Huanzhi published '*suanjingshishu*' in Tingzhou.

In the Ming Dynasty, Fujian's traditional mathematics suddenly declined along with the China's traditional mathematics. Pure mathematics was nearly unable to recover after a setback. But the practical mathematics actually developed very quickly. Abacus became popular. The famous experts at abacus were Xu Xinlu and Ke

Shangqian. The former wrote a book named '*panzhusuanfa*',the later wrote a book named '*shuxuetonggui*' . In late Ming and early Qing, western mathematics started to spread in our country,Fujian's traditional mathematics was affected by it. From the early Qing to the middle Qing, apart from 'the school of Anxi' led by Li Guangdi, the renowned mathematicians included Zhuang Hengyang and Chen Jixin. Famous Mei Wending should not have been recognized by Emperor Kangshi without Li Guangdi's recommendation. Zhuang Hengyang wrote a book named '*zhuangshisuanxue*' at his leisure time. Taught by Ming Antu, Chen Jixin and other people wrote a book named '*geyuanmilujiefa*', and they had completed to prove 'the nine methods of P.Jarloux'. After Opium War,westernization movement started to happen. Officials advocating westernization established the Fuzhou Ship School in Fuzhou, and its mathematics education practised the mathematics curriculum of western engineering education. This time it is the same as the Chinese traditional mathematics, Fujian's traditional mathematics gradually melted into the mainstream mathematics in the world

Taken the Chinese traditional mathematics thought as the reference, the basic characteristics of traditional mathematical thought of Fujian may take a clear emergence. As an organic part of Chinese traditional mathematical thought, on the one hand, taking the Chinese traditional mathematical thought as the source, it reflected certain characteristics of the Chinese traditional mathematical thought; On the other hand, its development has certain independence, and displayed some kind of bright regional characteristics in its developmental course. The major influence of Chinese traditional mathematics thought on the counterpart of Fujian displayed as following: 1st, close integration of mathematics with practical application; 2nd, close integration of mathematical research with astronomical research; 3rd, close attentions to accurate mathematical calculation. The major influence of traditional mathematics thought of Fujian on the Chinese traditional mathematics thought displayed as following:: 1st, Bao Huanzhi's publication of '*suanjingshishu*' in Tingzhou; 2nd, Xu Xinlu and Ke Shangqian's abacus ;3rd, Zhuang Hengyang's study on Chinese mathematics in integration with western mathematics ; 4th, Chen Jixin's reseach of infinite series.

Key Words : Fujian; tradition; mathematical thought

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：刘秋华

2007 年 5 月 28 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（√）

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名：刘秋华　　日期：2007年5月28日

导师签名：郭金彬　　日期：2007年5月28日

前言

数学思想是数学产生的思想依据和思想方法，也包括数学成果所蕴涵的思想精髓。[①]福建传统数学思想是中国传统数学思想的有机组成部分。“中国传统数学思想”这个概念的提出，既表示古代中国有与其他古代文明中心不同特色的数学思想，也表示现代中国数学在它从古发展至今的历程中有过自己独特的思想渊源，并且这种思想渊源至今仍有其宝贵价值。而中国传统数学思想其主体部分是由多个区域性数学思想交汇而成。研究中国各区域性数学思想对丰富和发展中国传统数学思想的研究，具有一定的意义。基于此，我们利用厦门大学所在的地域优势，对福建传统数学思想进行了系统的研究。本文是这个方面的成果。

一、研究现状综述

早在民国时期，中国现代科学史的前辈钱宝琮先生（1892—1974）和吕子方先生（1895—1964）已经对区域性数学史和数学思想研究表现出一定的兴趣。钱宝琮先生于1937年3月在《文澜学报》第三卷第一期发表了《浙江畴人著述记》一文。今人在整理吕子方先生的遗著时发现了《天数在蜀》[②]一文。两位前辈在各自的文中绘出了各自故乡数学史发展的脉络。

目前，无论是在国内还是在国际上，区域性数学史或数学思想的研究是一个热点。

在国内，区域性数学史或数学思想的研究通常整合在区域性科学技术通史的研究之中。目前出版的此类著作有：《火井飞焰照天垂：巴蜀科技史略》（查有梁，周遂志著，四川人民出版社，2001 年版）、《泉州科技史话》（黄乐德著，厦门大学出版社，1995 年版）、《厦门科技史话》（刘青泉著，鹭江出版社，1998 年版）、《楚国科学技术史稿》（后德俊著，湖北科学技术出版社，1990 年版）、《西藏古代科技简史》（张天锁编著，西藏人民出版社、大象出版社，1999 年版）《西藏科学技术史》（牛治富主编，西藏人民出版社，广东科技出版社，2003 年版）等等。可以说，几乎每个省的科技史都有著作出版。这些著

[①] 郭金彬,孔国平.中国传统数学思想史[M].北京:科学出版社,2004.v

[②] 吕子方.中国科学技术史论文集[C].成都:四川人民出版社,1983.225-268.

作大多为通史性著作或论文集，对各自区域的数学史只是作了粗线条的介绍，并没有深入。

在国际上，我们通过检索数据库MathSciNet[①]发现，目前与区域性数学思想史研究相关的民族数学史（Ethnomathematics）是一个热点。在这个领域工作的学者主要有M. Ascher和P.Gerdes等人，他们的工作已有了一定的国际影响。前者主要研究生活在太平洋小岛上土著民族的数学思想，后者主要研究生活在撒哈拉沙漠南部土著民族的数学思想。他们采用的研究方法主要为民族学方法和人类学方法。

就福建传统数学思想的研究现状而言，概括起来表现出如下两个特点：

1、福建传统数学中典型数学家和重大事件的研究。其中以对福建古代珠算的研究最为充分。如李俨先生《中算史论丛》中的“珠算制度考”、华印椿先生《中国珠算史稿》等奠定了福建古代珠算研究的基础，此后劳汉生、郭世荣、郭金彬等人也发表过有关研究专著和论文。《割圆密率捷法》是福建人陈际新参与写作的中国传统最优秀的数学著作之一，李俨先生《中算史论丛》中“明清算家的割圆术研究”是对其研究的基础性论文，近年来罗见今等人对其研究也作出了重大的成绩。此外，也有对庄亨阳、李光地、丁拱辰等人的数学思想的零星研究。如韩琦的“君主和布衣之间:李光地在康熙时代的活动及其对科学的影响”（见：清华学报(新竹),1996,26(4):421-445),郭金彬的“丁拱辰及其《演礟图说辑要》”等。

2、福建传统数学思想的综合性研究。在中国期刊网中检索，此类研究在二十余年来仅有郭金彬的“宋代福建数学发展之特色”(福建师范大学学报(哲学社会科学版) 1992年 01期）一篇。此外，郭金彬于1984年《自然辩证法通讯》第二期上发表了 “清代八闽数学略论”，这也是一篇综合性研究论文，但此文并没有在中国期刊网中检索到。对此文《自然辩证法通讯》编者按指出：“……倡导各地科学史工作者能利用本地的有利资源，发挥优势，在研究区域性科学思想

[①]MathSciNet 是基于著名的评论期刊《Mathematical Reviews》(MR）及检索期刊《Current Mathematical Publications》(CMP）制成网络电子版数据库。《Mathematical Reviews》(MR）是目前世界上最权威的评论性和报道性的数学文摘杂志。由AMS（美国数学会）于1940年创办。该杂志评论的文献包括期刊、图书、会议录、文集和预印本，其中对1800多种期刊做选评，对400余种数学核心期刊做全评。目前，中国有近150种期刊被选评。CMP是一种以报道全球已经出版或即将出版的数学文献为主旨的通告性杂志，每个条目都由美国数学评论编辑选择，并根据《Mathematics Subject Classification》(MSC：数学主题分类）进行分类。数学史的主题分类号为01。

方面作出努力，以求把研究工作引向深入。中国科技史研究会会长、中国科学院院士席泽宗先生极力倡导从各个方面研究中国科学思想，但这方面的成绩‘不能尽如人意’。这是一块意义、价值极大、‘尚属开垦的处女地’”。此文发表于二十多年前，是研究福建传统数学思想的开拓性论文。

二、本文的创新之处

本文是国内第一部研究区域性数学思想的专著。一方面，从整体看，本文综合了已有的有关福建传统数学思想的研究成果，首次系统、全面地展示了福建传统数学思想的发展历程；另一方面，本文在如下的几个方面又有所创新：

1、史料的发掘、整理和发现。如：鲍澣之生平的更精确描述，赵君卿名字的新考证，《盘珠算法》等算书的校订，李俨先生、钱宝琮先生等人的数学史著作中若干错误的纠正等等。

2、在数学思想史研究理论上的创新。如：现代数学理论对《割圆密率捷法》的新解读，《庄氏算学》历史地位的再评价，区域性数学思想发展规律的总结等等。

3、在人类活动的其他领域中发掘数学思想。如：苏颂的工程数学思想研究，阮逸、蔡元定的律算思想研究等等。

三、“算经十书”数学思想简介

在中国历史中，福建属于后开发地区。目前我们没有发现唐以前福建数学思想的任何文字史料。可是，到唐中叶，最能显示中国传统数学思想的“算经十书”都已经成书。

“算经十书”[①]是指《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张邱建算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《缀术》、《缉古算经》和《夏侯阳算经》这十部我国传统数学的经典著作。在《算经十书》中，成书最早的是西汉初年的《周髀算经》，最晚的是唐朝初年的《缉古算经》。二者相距约八百年。按照钱宝琮先生对我国古代数学的分期[②]，这八百年大体上与中国传统数学发展的第二期(公元前 221 年—公元 755 年)重合，是我国传统数学以《九章算术》为标志

[①] 本文引用的“算经十书”版本采用钱宝琮先生校点的“算经十书”。见：李俨,钱宝琮.李俨,钱宝琮科学史全集(第四卷)[Z].钱宝琮校点“算经十书”[M].沈阳:辽宁教育出版社,1998.

[②] 钱宝琮.中国数学史[M].北京:科学出版社.1981. 23

的数学体系形成的重要时期。在这个时期，我国传统数学形成了具有鲜明的华夏特色的数学学术范式，从而为在宋元时期我国传统数学达到顶峰奠定了牢固的基础。

对于“算经十书”的数学思想，郭金彬作了很好的总结。他认为“算经十书”的数学思想包括如下几个方面：

1、探索和追求精益求精的计算方法和技巧。

2、讲究明确的思想依据。

3、着力于灵活和广泛的应用。[①]

在这三个方面中，第一个方面“探索和追求精益求精的计算方法和技巧”最能显示中国传统数学思想的基本特色。正是在这个方面，中国传统数学思想与以欧几里德《几何原本》为代表的重演绎轻算法的西方传统数学思想迥异其趣。

四、宋代以前的福建数学史料

宋之前，祖国传统数学及思想，可从“算经十书”中看到其大概脉络。除“算经十书”之外，福建的数学思想史料，零零星星可拾到一些：

黄岳，福州感德场人。据清代吴任臣在《十国春秋》卷九十七记载：(黄岳)，博通经典，尤邃易象历数之学。唐末，由乡贡入太学。黄巢寇闽，避地者无所衣食。岳好施与，鲜倦容，从之者如市。太祖为威武节度使，闻其名，累辟为属，力辞不就。无何，太祖受王封，必欲起岳，岳度不能拒，遂投渊而死。岳妻林曰：“夫能为忠臣，妾独不能为忠臣妇乎？”亦投渊从之。邦人为立祠，祀于其地。一云：岳死时，父母妻子二弟一白犬皆赴水死；又来征岳者，崇舒赵田四人皆死。在《福建通志》、《道光福州志》中，亦记有黄岳之传，其内容与《十国春秋》相同。

陈陶，字嵩阳，剑浦人。据民国时期陈衍所书：陈陶，少时游学长安。天文历数无不精究，兼释老学。自号“三教布衣”(《福建通志》，卷七十二，[民国]陈衍)。又据明人黄仲昭所书：陈陶，剑浦人。家世以儒业名。陶性沈敏博学，善属文，于声诗历象无不精究，常以台肱之器自负。南唐元中至洪州，将诣建康，闻宋齐丘秉政，自料与齐丘不合，乃筑室西山，日以诗酒为事。有诗数百篇(《八

[①] 郭金彬.“算经十书”思想简论[J].厦门大学学报（哲学社会科学版）2003(01):100-107.

闽通志·卷六十九》，[明]黄仲昭)。

龚颖，邵武人，着有《运历图》三卷。据《八闽通志》称：颖，字同秀，初仕南唐，为内史学士。随李煜归宋，除御史，谪知舒州，改鼎州。太宗立，召拜殿侍御史。进《历年图》。降敕褒谕（福建通志局：《福建通纪·福建艺文志》，卷四十七，子部六，台北：大通书局，1968 年，第 1351 页)。又据《宋史》艺文志记载，《历年图》与《运历图》指同一部书。

第一章　鲍澣之与“算经十书”的刊刻流布

“算经十书”是我国传统数学及数学思想的珍贵宝藏，它能流传至今并得到发扬光大，是与福建和在福建汀州这个地方任职的鲍澣之密切相关。

第一节　鲍澣之生平

在中国方志、史书中，在科学史、数学史类著作中，曾出现过鲍澣之、鲍瀚之、鲍浣之等名字。现辑录如下：

在《宋史》、《福建通志》（同治版）、《闽书》、《汀州府志》（嘉靖版）、《处州府志》、《龙泉县志》和李约瑟著的《中国科学技术史》（天文数学卷）[①]、陈美东著的《中国科学技术史》（天文学卷）、李俨，钱宝琮的数学史著作中，出现过“鲍澣之”的名字。

在《长汀县志》、《汀州府志》（乾隆版）、《福建通志》（乾隆版）等书中，出现过“鲍瀚之”的名字。

在李迪的《中华传统数学文献精选导读》、纪志刚的《孙子算经、张邱建算经、夏侯阳算经导读》、白尚恕主编的《中国数学史大系》第三卷等著作中，出现过“鲍浣之”的名字。

早期元明时代的著作如《宋史》、《汀州府志》（嘉靖版）、《闽书》和清代的《处州府志》、《福建通志》（同治版）、《龙泉县志》中，都用“鲍澣之”。只有后期（如清代）的著作，如《长汀县志》、《福建通志》（乾隆版）、《汀州府志》（乾隆版）才用“鲍瀚之”。由于“澣”与“瀚”字形相似，因此可以怀疑“鲍瀚之”是在历代不断转抄过程中出现的误写。有意思的是，对照两个版本的《福建通志》，可以看出，新版本的编者也已经意识到了这个问题，并在新版本中作了更正。

另外，在简体字的书中多用“鲍澣之”或“鲍浣之”，而“鲍瀚之”极为少见。对于“浣”与“澣”，二字音义相同都读作“（huàn）”。今天“澣”字已经较少使用，并常用“浣”来代替，但“浣” 字并不是现在才有，“浣”和“澣”二字自古就有，并且并存使用了很长时间。《诗经》的《周南·葛覃》篇中有：“薄

[①] [英]李约瑟.中国科学技术史[M].北京:科学出版社，1978.43

澣我衣”;《公羊传·庄 三一年》中有:“临民之所漱浣也”。因此，用在古代人名的“澣”字，似乎不宜用“浣”替换，不然会引起误解。钱宝琮先生的繁体字版本和简体字版本的《钱宝琮校点“算经十书”》都用“鲍澣之”就说明了这个问题。在本书中,我们采用“鲍澣之”。

对于鲍澣之的籍贯，现在一般都根据他自己的说法，认为他是处州括苍人，如李俨在《中国古代数学史料》中就是这样的观点。对这种看法，李迪已经提出了怀疑，他认为:“括苍，古县名，隋置，以括苍山而得名，治所在今浙江丽水东南。此处也许指的（是）括苍山。宋时已无括苍县”[①]。但李迪先生也并不知道鲍澣之的确切籍贯。今查阅《处州府志》和《丽水县志》，前者录有“鲍澣之”其人，而后者无。但在查阅《处州府志》过程中，发现处州府中鲍姓名人大多出自龙泉县。因此我们推测，他可能是龙泉人。再仔细查阅《龙泉县志》，发现里面果然收录着他的名字。

由于《福建通志》、《汀州府志》、《长汀县志》、《闽书》、《处州府志》,《龙泉县志》等方志中仅仅收录了鲍澣之的名字，并无他的传记，在《宋史》律历志中仅仅记载了他制订历法的情况，也没有他的传记，阮元在《畴人传》中虽然有传，但记述基本与《宋史》雷同。因此，他的事迹无法详考，在此，只能粗略地描述如下:鲍澣之，字仲祺，主要活动于南宋宋宁宗在位期间，浙江处州龙泉（今浙江丽水市龙泉县）人。《处州府志》的选举卷中认为他是通过征辟而做官的，而《龙泉县志》的选举卷中则认为他是通过刑法科的考试而做官的。由于他在司法部门任职时间较长，因此后一种说法似乎更可信。他先后在靖安（今江西省靖安县），临安（今浙江省杭州市），汀州（今属福建省，州府位于今福建省长汀县）等地做过官。

鲍澣之除了为《九章算术》、《周髀算经》、《数术记遗》写过序外，没有其他的文字流传下来。如果没有特别说明，在本书中引用他的文字的时候，《九章算术》序用《四库全书》版（台湾商务印书馆影印，第 797 册，天文算法类),《周髀算经》序用《续修四库全书》版（上海古籍出版社据南宋版影印，第 1041 册，天文算法类),《数术记遗》序用《续修四库全书》版（上海古籍出版社据南宋版影印，第 1041 册，天文算法类）。我们的评述和研究尽量用原始版本作为依据。

[①] 李迪.中华传统数学文献精选导读[C].武汉：湖北教育出版社，1999.278.

第二节　鲍澣之的天算成就及思想

鲍澣之是南宋著名的天文学家之一，在临安期间，他曾和南宋著名的天文学家杨忠辅讨论过历法。关于这一点，《宋史》和他的《九章算术》序中都有记载。在《宋史》中，鲍澣之曾上书宋宁宗说："当杨忠辅演造《统天历》之时，每与议论历事"[1]。在《九章算术》序中，他说："庆元庚申之夏，余在都城，与太史局同知算造杨忠辅德之论历，因从其家得古本《九章》，乃汴都之故书。"

杨忠辅，字德之，河南人，《统天历》的制订著。《统天历》是我国历代最先进的历法之一。《统天历》最伟大的成就是提出回归年的长度并非常量，而是随着时间的推移不断减少。杨忠辅在《统天历》中给出了回归年随时间而变化的改正值一"斗分差"，并建立了如下求任一年（t）的回归年长度值（T）的计算公式：

$T=365.2425-0.00000216（t-1195）$

杨忠辅测算的回归年的准确长度值为365.2425天，误差约为22秒，这个值在我国当时历法中是最好的。1582年罗马教皇格里戈利十三世（Gregory X Ⅲ,1502－1585）颁布的，沿用至今的格里历，所采用的值也正与此相同。但是《统天历》在宋宁宗庆元五年（1199年）正式颁布的当年预测日食就不灵验。史载"庆元五年七月辛卯朔，《统天历》推日食，云阴不见。六年六月乙酉朔，推日食不验"[2]。这是令杨忠辅非常头痛的事情。此时鲍澣之也开始热烈地与杨忠辅讨论历法问题。不久使杨忠辅倒台的事发生了。宋宁宗"嘉泰二年（1202年）五月甲辰朔，日有食之，太史与草泽聚验于朝。太阳午初一刻起亏，未初刻复满。《统天历》先天一辰有半，乃罢杨忠辅，诏草泽通晓历者应聘修治。"[3]这段记载也反映了南宋历法制定制度一个鲜明的特色：职业天文历法专家并没有垄断历法的制定权。民间草泽、布衣、士人也有机会大显身手推动历法改革。正是在这种比较开明宽松的制度下，优秀人材不断脱颖而出。不久，鲍澣之出场了。

宋宁宗开禧三年（1207年），鲍澣之时任大理评事。他提出，既然《统天历》进历来此，推测日食已不验，那么应当"选演撰之官，募通历之士，置局讨论，更造新历。"[4]当时，鲍澣之研究天算已经有很长时间了。他说："当杨忠辅演造

[1] (元)脱脱等.宋史[M].北京：中华书局.1977.1944-1947.
[2] (元)脱脱等.宋史[M].北京：中华书局.1977.1943-1944.
[3] (元)脱脱等.宋史[M].北京：中华书局.1977.1944-1947.
[4] (元)脱脱等.宋史[M].北京：中华书局.1977.1944-1947

《统天历》之时，每与议论历事，今天《统天历》舛近，亦私成新历。"[①]他当时向朝廷进献了新历，并愿意与其他人进献的历法相互参考，择优颁用。他说："《统天历》来年闰差，愿与诸人所进历，令秘书省参考颁用。"[②]

当时朝廷答应了鲍澣之的请求。与鲍澣之同时献历者还有刘孝荣、王孝礼、李孝节、陈伯祥等人。朝廷开局造《开禧历》，秘书监国史院编修官、实录院检讨官曾渐任提领官，鲍澣之任参定官人，招民间善算人士，曾经献历者以及《统天历》的修订者都作为推算官。一年之后，宋宁宗嘉定元年（1208 年），发现鲍澣之进献的新历与天道最合，朝廷把它作为《开禧历》，并附在《统天历》上颁用。

不久，婺州布衣阮泰发献《浑仪十论》，并且说《统天历》、《开禧历》都有差错，邹淮也说历法不准，应当改造。嘉定三年（1210 年）朝廷向曾渐、鲍澣之质询《开禧历》中出现的问题，鲍澣之承认了《开禧历》中的失误。朝廷再次设局造历。此时太子詹事兼同修国史、实录院同修撰兼秘书监戴溪任提领官，鲍澣之继续任参定官领导邹淮演撰。王孝礼、刘孝荣提督推算官十四人推算。新历于嘉定四年（1211 年）制定成功，但由于戴溪在政治斗争中失败，被免职，新历没有颁行。因此《开禧历》并没有立即被废除，而是继续附在《统天历》上并流行于世达四十五行之久。

据陈美东先生研究[③]，《开禧历》所取木星周期为 4332.5828 日，误差为 9.0 分钟，是为历代最佳值，其必定发生月全食的食限值为 4.08°，误差为 0.17°，逊于《统天历》，但为历代较好的数据。其取木、火、土、金、水五星近日点黄经每年进动值分别为 52.72″、52.70″、52.70″、52.67″、52.92″，误差分别为 5.24″、13.50″、17.80″、2.02″、3.08″，亦为历代最佳值。鲍澣之具体如何取得这些数值，《宋史》并未记载，只是说是在姚舜辅《纪元历》的基础上修改而编写的。

另外，据陈美东先生对《纪元历》中数学方法运用的研究可知[④]，姚舜辅对数学方法的运用采取了多样化的思路，他既采用了自隋代刘焯以来的二次差内插法，又采用唐代曹士蔿、边冈以来的高次函数算式，还应用了他自己首创的新算法，形成了丰富多彩的算法系统。《纪元历》对南宋的历法修订产生了决定性影

① (元)脱脱等.宋史[M].北京：中华书局.1977.1944-1947.
② (元)脱脱等.宋史[M].北京：中华书局.1977.1944-1947.
③ 卢嘉锡，陈美东.中国科学技术史（天文学卷）[M].北京：科学出版社,2003.512.
④ 卢嘉锡，陈美东.中国科学技术史（天文学卷）[M].北京：科学出版社,2003.488.

响，南宋的绝大数历法都是在《纪元历》的基础上作少许修订而成。《开禧历》是这些历法中的其一，在历法的基本结构、推算程序和数学方法上也承袭了《纪元历》而不改。因此，可以推知鲍澣之的数学水平大体如姚舜辅，比起贾宪、杨辉、李冶、朱世杰“宋元四大家”来说还是相差一大截，在当时只有二流水平。

宋元时期处于我国古代科学技术的高峰，天文历算方面尤其如此。鲍澣之作为一位天算学家，他的思想既具有鲜明的时代特性，又具有一定的个性特征。鲍澣之的为学态度，为学思想，为学方法等方面是值得我们学习和借鉴的：

1、具有谦虚好学的为学态度。这在他向杨忠辅学习历法的过程中充分表现出来。杨忠辅作为一位前辈天文学家，但由于鲍澣之向他学习的态度十分认真，十分虚心，杨忠辅将自己珍藏的《九章算经》赠给了鲍澣之。

2、坚持实事求是的科学精神。这既是他个人优良的品质，也是南宋当时宽松开明的学术环境的表现。在南宋，朝廷评价历法的标准是是否与天道相合，而不是其它因素。因此，鲍澣之在论历时，敢于指出老师所犯的错误；当他自己编的历法出现问题时，也愿意接受他人的批评；在进献历法时，他愿意将自己修编的历法与他人的历法共同参考，以便朝廷择优颁用.此外,鲍澣之还认为历法的作用非常重要,但对之并不迷信,他认为:“汉人以谓历元不正,故盗贼相续,言虽迂诞,然而历纪不治,实国家之重事。”[①]这说明,南宋的天文学家能摆脱迷信观念,用实事求是的科学方法来制定历法.

3、坚持严谨扎实的学风。这一点在他对古算经的研究中突出地表现出来，关于这方面，将在下一节中详细讨论。

尽管鲍澣之的为学思想，为学精神、为学态度值得我们学习的地方很多，但并不是完美无缺，也存在着一定的缺陷，比如他墨守成规；不愿意接受杨忠辅改革历法的先进部分。据陈美东先生研究[②]，杨忠辅在历元问题上，表现出了进行改革的极大勇气，他既反对把历元同所谓的开天辟地之年相联系的观念，而仅视之为有关历法问题的起算点，又反对牵强地追求一个庞大积年数的统一起算点的做法，而以多起算点、直接与天合的实测历元法取代之，但是，鲍澣之对此极力反对：“其历书演纪之始，起于唐尧二百年，非开辟之端也。气、朔、五量皆之虚加、虚减之数……以是而为术，乃民间小历，而非朝廷颁下朔，授民时之书也。”

[①] (元)脱脱等.宋史[M].北京：中华书局.1977.1944-1947.

[②] 卢嘉锡，陈美东.中国科学技术史（天文学卷）[M].北京：科学出版社,2003.510.

[①]不过，我们在这一点上不能苛求鲍澣之。虽然杨忠辅的历法思想在当时而言是很先进的，但他编的《统天历》并不是在每个方面优于当时的其它历法。《统天历》在预测日食等方面就比鲍澣之编的《开禧历》要差。在科学史中，这样的例子是屡见不鲜的。

又比如，他厚古薄今，极大推崇古人的科学成就，以致把《周髀算经》的成书年代推算到公元前1100年以前，产生了一个重大错误。他在《周髀算经》的序中写道：

《周髀算经》二卷，古盖天之学也．……其书出于商周之间．自周公受之于商高，周人志之，谓之《周髀》．其所从来远矣．

这可能是鲍澣之过于崇信古人所致的吧。现在已经没有人支持鲍澣之对《周髀算经》的成书年代的这种估计。但是，鲍澣之的估计，影响却很大，很多汉学家如毕瓯（E.Biox）、史密斯（D.E.Smith）和三上义夫（Mikami）等人把他的这种观点载入数学史册，认为《周髀》留给我们的是“公元前1100年的一部完美的数学记录。”[②]

第三节　鲍澣之等对赵君卿的研究

赵君卿是我国古代著名的数学家，他对《周髀算经》的注长期受人重视。用“出入相补原理”证明勾股定理是他一生最得意工作，其证法与西方欧几里得证明该定理的特点大为不同，反映了中华传统数学和数学思想的鲜明特色。阮元在《畴人传》中曾予美誉[③]：

勾股圆方注五百余言耳，而后人数千言不能详者，皆包蕴无遗，精深简括，诚算氏之最也。

阮元对赵君卿的评价可以说是恰如其分。但赵君卿究竟是何许人？提出这个问题在研究数学史的人的眼中看来似乎是一个非常幼稚的问题：“赵君卿”难道说不就是“赵爽”吗？非也！“赵君卿”是“赵婴”，而不是“赵爽”。本书辨析如下（在下文中，把认为“赵君卿”是“赵爽”的观点简称为“赵爽说”；把认为“赵君卿”“赵婴”的观点简称为“赵婴说”）：

[①] (元)脱脱等.宋史[M].北京：中华书局.1977.1944-1947.
[②] [英]李约瑟.中国科学技术史，第三卷：数学[M].北京：科学出版社，1978.44.
[③] (清)阮元.畴人传[M].续修《四库全书》第516册，史部，传记类.上海：上海古籍出版社,1995.

1、支持“赵爽说”的在宋代有李籍，今人有钱宝琮、李迪等人。其中李籍是“赵爽说”的首先提出者，他在《周髀算经音义》中写道：

赵君卿，爽字也，不详何代人也。

钱宝琮是“赵爽说”的最重要的支持者，早在1929年，他在《科学》第十四卷第一期撰文《周髀算经》考中写道[①]：

《隋书·经籍志》载“《周髀》一卷赵婴注”，《周髀》一卷甄鸾重述。《唐书·艺文志》天文类有赵婴注《周髀》一卷，甄鸾注《周髀》一卷，其历算类又有李淳风释《周髀》二卷。宋元丰七年九月秘书省刊“算经十书”，《周髀算经》一部上下共二册，即以李淳风注本付印。卷首题“赵君卿注，甄鸾重述，唐朝议大夫行太史令上轻车都尉臣李淳风等奉敕注释。”按赵君卿注其自序称：“爽以暗蔽”，注内屡称“爽或疑焉”，“爽未之前闻”，“此爽之新术，”“于是爽更为新术”，则注者是爽不名婴毫无疑义。

钱宝琮先生还批评了《隋书》、《唐书》及鲍澣之等。他继续写道：

《隋志》误作赵婴，《唐书》因亦沿讹，南宋鲍澣之谓“赵婴、赵爽止是一个人”是也，然云“当从隋唐之书为正”，则来免矜慎太过矣！

李迪也是“赵爽说”的支持者，在白尚恕主编的《中国数学史大系》第三卷东汉三国时期部分，李迪先生写道[②]：

在宋刊本《周髀算经》的序署名为“赵君卿”，而又序中又说：“爽以暗蔽，才学浅昧，”因此宋代李籍说：“君卿，赵爽字也”。这是可能的。又，“《周髀》一卷，[赵婴注]。”（李先生在这里加了注“《隋书》卷三十四，经籍志”）于是清代阮元认为“赵爽，字君卿，一曰名婴”。恐怕“一曰名婴”之说不可靠，很可能是由于两字的字形相近，由“爽”误为“婴”所致。

2、支持“赵婴说”的有鲍澣之、明代的朱载堉等人，其中鲍澣之是“赵婴说”的首先提出者，他认为：

《周髀算经》二卷，古盖天之学也。……《隋书·经籍志》有赵婴注《周髀》一卷，而唐之艺文志天文类有赵婴注《周髀》一卷，甄鸾注《周髀》一卷；其历算类仍有李淳风注《周髀算经二卷》。本此一书耳。本朝崇文总目与夫中兴馆阁书目皆有《周髀算经》二卷，云赵君卿述，甄鸾重述，

① 中国科学院自然科学史研究所.钱宝琮科学史论文选集[C].北京：科学出版社,1983.119.
② 吴文俊,白尚恕.中国数学史大系[M].北京：北京师范大学出版社,1998.23.

李淳风等注释。赵君卿名爽，君卿其字也。如是则在唐以前则有赵婴之注，而本朝以来则是赵爽之本，所记不同，意者赵婴，赵爽止是一人。岂其字相类，转写之误耶，然亦当以隋唐之书为正可也。

朱载堉也支持“赵婴说”，他在明代版《古周髀算经》的跋文写道：

朱载堉曰：齐有晏婴，汉有灌婴，皆大臣也。故赵婴，字君卿，盖取也。以此证之。爽字误无疑矣。

此外还有一种折衷的观点，这种观点认为“赵婴说”“赵爽说”都有一定的合理性，并把这两种说法都并存保留，支持这种观点的有阮元、李俨等人。

如阮元认为[①]：

赵爽，字君卿，一曰名婴。

李俨也持同说[②]：

赵爽，字君卿，一曰名婴

沈康身也认为[③]：

赵爽名婴，字君卿，身世不详。

折衷说没有错误，但不能确切解决赵君卿的名字之谜。

在中算史界，“赵婴说”现在似乎销声匿迹了。但通过分析支持双方观点的证据，可以肯定地说，“赵婴说”比“赵爽说”更有说服力，在现有的资料条件下，我们认为赵君卿为赵婴更合理一些。

1、从资料的源头来说，支持“赵婴说”的最早资料来自《隋书》和新旧《唐书》，而支持“赵爽说”的最早资料来自李籍的《周髀算经音义》。而李籍大约活动于北宋宋神宗元丰人，《隋书》是由唐魏征主编的，新旧《唐书》分别是由后晋刘煦和北宋欧阳修主编的，三人的时代显然都在宋神宗元丰之前。从这个方面看，支持“赵婴说”的证据的质量优于支持“赵爽说”的质量。

2、双方认为“爽”“婴”字形相似，容易相互误写，这恰恰成了支持“赵婴说”的有力证据，由于“赵婴”在前，不可能如李迪先生所说的，“赵爽”误为“赵婴”是由“爽”误为“婴”所致。

3、朱载堉根据古人起名的习惯而提出的支持“赵婴”说的的证据，“赵爽说”

---

① (清)阮元.畴人传[M].续修《四库全书》第516册，史部，传记类.上海：上海古籍出版社,1995.

② 李俨.中国古代数学史料[M].上海：中国科学图书仪器公司,1954.53.

③ 吴文俊.《九章算术》与刘徽[C].北京：北京师范大学出版社,1982.76.

更是不具备的。古人有名有字，名和字一般都有意义上的联系，如屈原，名平，字原；诸葛亮，字孔明；岳飞，字鹏举等等。“君卿”意为“君王之臣”，而晏婴、灌婴都是赵君卿之前的史上名臣。因此，为“赵君卿”取名为“婴”是有深意的，希望他长大了能做象晏婴和灌婴那样的大官。据此看来，朱载堉的分析是很有道理的。

4、今天所传的《周髀算经》都是以宋代的版本为母本，以前的版本都已经散佚殆尽，以宋版的《周髀算经》的内容本身作为支持“赵爽说”的依据是不充分的。

5、既然如此，为什么鲍澣之不在他刊刻的算经中把错误改正过来，而消除后世的纷争呢？鲍澣之深知前人写书抄书的不易，为了尊重前人的心血劳动，他在刻书时尽量要保持前书的原貌。如他发现以前历代算家对甄鸾的记述都有错误，但在《数术记遗》中，他并没有纠正。这件事已被他写入到《数术记遗》序中：

> 甄鸾，宇文周时人，尝造太和历者。算家诸书皆书其衔以为汉中郡守（前司隶时代官称），皆承误也。今不欲改，因书于卷末。

可见，既然他不愿改正前人关于甄鸾的错误，那么他不愿改正前人关于赵君卿的错误是很有可能的，

总之，鲍澣之首先提出的“赵婴说”比起其对立面“赵爽说”的理由要充分得多。今天在这里提出来，希望能引起学术界重视，能够给赵君卿的名字一个正确的说法，从而改正流行多年的错误。

第四节　鲍澣之在汀州对算经的刊刻

嘉定六年（1213年），鲍澣之以朝奉郎知福建路汀州府。明嘉靖《汀州府志》职官卷中记载：“鲍澣之于嘉定六年以朝奉即知本州，八年除刑部即官，离任。”在福建汀州任职期间，以当时人看来，鲍澣之政绩平平，因此，各方志均无传；但以今天的眼光看来，在科学上除了我们已经提到的制定《开禧历》之外，还创下另一项勋业，这就是使他名垂千古的工作——刊刻算经。

早在唐代，会算之士也能被选拔为官。《新唐书》第四十四卷选举志称：“其科之目，有秀才，有明经，有进士，有明法，有明算，……有道举，有童子。”同时，比较完备的数学教育制度也随之形成，在教学内容上包括有《算经十书》、

《数术记遗》、《三等数》等。关于这个方面，《新唐书》的选举志、《旧唐书》的职官志，都有记载。鲍澣之在《数术记遗》序中也称：

唐以明算取士，其立于学官者曰：《九章》、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经算》、《缀术》、《缉古》凡十经，而《记遗》、《三等数》皆兼习之。

可是在五代十国的动乱时代，战事频繁，民不聊生，许多算学著作散佚了，《三等数》和著名的《缀术》就是这个时候失传的。到了宋代，上述的十二种算书只有十种流传于世了。

宋代是我国古代科学技术发展的鼎盛时期，由于造纸术和雕版印刷术的蓬勃发展，又由于宋代对科学技术与其它朝代相比比较重视，刊刻算书此时才成为可能。目前我国传统的数学著作，多是以宋代的版本作为母本不断翻印，流传下来的。鲍澣之在福建汀州为刊刻传统数学著作而进行的努力，是具有重要的历史意义的。

明程大位的《算法统宗》卷末的《算经源流》条称[①]：

宋元丰七年（1084年）刊十书于秘书省，又刻于汀州学校

黄帝九章 周髀算经 五经算法 海岛算经 孙子算经 张丘建算经 五曹算法 缉古算经 夏侯阳算法 数术拾遗

所谓中算书的宋代版本，是指北宋元丰七年（1084 年）秘书省版本和南宋福建汀州版本。那么，北宋元丰七年秘书省究竟校刻了哪几种算经？据李俨先生考证[②]，我国宋代依唐代制度，再置算学，因而需要刊刻唐代国子监学馆所规定的“算经十书”，以备学习之用。据王国维《五代两宋监本考》卷中所载，北宋监本有：《周髀算经》二卷、《九章算术》九卷、《孙子算经》三卷、《数术记遗》一卷、《海岛算经》一卷、《五曹算经》五卷、《夏侯阳算经》三卷、《张丘建算经》三卷、《五经算术》一卷、《缉古算经》一卷。

所见宋本《周髀》、《孙子》、《五曹》、《缉古》、《夏侯阳》、《九章》诸算经，皆标有“元丰七年九月　日”之字样，又据宋王应麟《玉海》（卷四十四）、马端临《文献通考》（卷二百一十九）、陈振孙《直斋书录解题》等书所载，上述算书刊刻于元丰七年可考者，有：《周髀》、《孙子》、《五曹》、《缉古》、《海岛》、《夏

[①] 李俨.中国古代数学史料[M].上海：中国科学图书仪器公司,1954.91.
[②] 李俨.唐宋元明数学教育制度[A].中算史论丛:第四集[C].北京:科学出版社,1955.273-274.

侯阳》、《九章》、《张丘建》这八种。以上八种，都是由赵彦若校定的。

刊刻算经，福建学者做了不小的贡献。据王国维《五代两宋监本考》所载[1]，上有："秘书省"

某某《算经》一部××共×册

元丰七年九月校定，降授宣德郎秘书省校 书郎臣叶祖洽上进

……

宋影本《周髀》、《五曹》、《孙子》、《夏侯阳》、《五曹》、《缉古》诸算经之后，亦有这些字样。《麟台故事》记元丰七年前后秘书省官吏题名中，亦有"……秘书省正字从八品 叶祖洽，字敦礼，邵武人。熙宁初策试进士，……由国子丞知湖州，留为校书郎。……元祐初，历职户、兵部员外郎，加集贤校理，进礼部郎中。……绍圣中，入为左司郎中、起居郎、中书舍人、给事中。……知洪州，改亳州，加徽猷阁直学士。政和未卒。"又查《邵武县志》，上有："熙宁三年癸戌 ，叶祖洽榜，是年终以经义策论试士郡中登第者十四人，今逸其半"。福建学者为刊刻数学著作的北宋监本作出了贡献。

但是，自 1127 年北宋京都（汴都）陷落于金兵之后，北宋时期所欲振兴的中国传统数学的风气亦随之骤然衰微，"靖康二年，金人入汴，秘阁三馆书籍、监本印板，并取而去，府库蓄积，为之一空，秘阁图书，狼籍泥土中。"南渡的宋朝廷根本无法顾及这些了。这样，北宋原有的数学刊本逐渐消失，我国古代算经濒临绝世，岌岌可危。鲍澣之看到我国传统数学典籍面临的浩劫，痛心疾首，在《九章算术》的序中，他说"自衣冠南渡以来，此学既废，非独好之者寡，而《九章算经》亦几泯没无传矣。"一方面，他留心并广泛搜集古代数学著作。他在"都城与太局事同知算造杨忠辅论历，因从其家得古本《九章》，乃汴都之故书。"在宋宁宗嘉定五年（1212 年），其时他准备去汀州为官，在杭州七茅山宁寿观，"阅《道藏》中书目，乃见有《数术记遗》者，"他喜出望外，"亟恳道士启函快读之。"他惟恐此书失传，"即就录之，以补算经之阙。"另一方面，他寻找机会刊刻算经使其广泛流传。嘉定六年（1213 年），他被放到汀州任知州。这个机会终于来临了。

在宋代，福建的经济已跻身国内发达行列。与刻书业有关的造纸业也非常发

[1] 引自：李俨.唐宋元明数学教育制度[A].中算史论丛:第四集[C].北京:科学出版社,1955.275-276.

达。福建的各州府都产纸。造纸业的发达，使刻书可以就地取材，从而大大地降低了刻书的成本。这有力地促进了宋代福建刻书业的发展，使福建刻书与杭州刻书、四川刻书三足鼎立。虽然福建的宋代刻书质量稍逊于杭州刻书、四川刻书，但其价格低廉，在全国流行最广。

从鲍澣之制定《开禧历》就可以看出，他是个实干家。在知汀州期间，鲍澣之也兼管内劝农事，主管坑冶，干的是一些实事。他不是一个腐儒，当然不会不感受到任职地发达刻书业，也不会不想到要利用这大好机会，把自己搜集的算书刊刻流传于世。此时，他个人的内在条件——作为一州的长官，和刻书的外在条件——任职地发达的刻书业都已具备，实现他刊刻算书的愿望当然也就顺理成章了。

据钱宝琮先生考证[①]，鲍刻古算经今仅存 6 种，每种仅有一孤本，今分别珍藏上海图书馆、北京大学图书馆。现据《中国版刻图录》和上海图书馆，北京大学图书馆提供的资料，把鲍刻古算经的情况略述如下：

《九章算经》，嘉定六年知汀州军鲍澣之刻本，存卷一至卷五，凡 5 卷。天禄琳琅旧藏毛氏汲古阁抄本，即据此本影抄；框高 20.4 厘米，广 14.7 厘米；半页 9 行；行 18 字；细黑口，左右双边。现藏于上海图书馆。

《周髀算经》，嘉定六年刻。卷末有北宋元丰七年（1084 年）校进诸氏衔名 6 行，又有嘉定六年鲍澣之后跋，毛氏汲古阁抄本即据此本影抄，毛氏谓此系元丰七年秘书省刊版，误。是书框高 20.7 厘米，广 14.7 厘米；半页 9 行，行 18 字；细黑口，四周双边。现藏于上海图书馆。

《孙子算经》，嘉定六年刻，毛氏汲古阁影抄。框高 20.4 厘米，广 14.8 厘米。半页 9 行，行 18 字；细黑口，左右双边。现藏于上海图书馆。

《数术记遗》，嘉定六年刻本。此书南宋初已罕见，鲍澣之于三茅宁寿观道藏中抄得，刻于汀州，遂传于世。现藏于北京大学图书馆。

《五曹算经》，嘉定六年刻，毛氏汲古阁抄本即据此本影抄。是书框高 20 厘米，广 14.5 厘米；半页 9 行，行 18 字；细黑口，左右双边。现藏于北京大学图书馆。

《张丘建算经》，嘉定六年刻，毛氏汲古阁本即据此本影抄。是书每半页 9 行，行 18 字；细黑口，左右边；框高 20.2 厘米，广 14.7 厘米。现藏于上海图书馆。

---

① 李俨，钱宝琮.李俨 钱宝琮科学史全集，第四卷：钱宝琮校点《算经十书》[M].沈阳：辽宁教育出版社，1998.6，71，219，254，311，405.

在刊刻《算经十书》时，鲍澣之特别注意质量。他特意让浙江的刻工参加雕版，如刊工中有既曾在临安府雕过版，又参加过《明州文选》开雕的蔡政[①]。汀州古算经字体秀丽，印制精良，在福建古代刻书中质量上乘,是其它闽刻不可比拟的。钱宝琮先生在校点《算经十书》时，把汀州鲍刻南宋古算经作为重要的文本依据。

与上述六本算书同时流传至今的鲍刻算书还有《算学源流》。《算学源流》中记载着大量的古代数学教育资料。目前,此书也珍藏于北京大学图书馆。

在我国古代，数学被作为“六艺”之末，向来不大受民间和政府重视。福建古代刻书，因此也很少把天文算法之类的书作为拟刻之列。鲍澣之利用政府资源刊刻算经，无疑是其中的亮点，使当时处于岌岌可危的数学事业得以传承和发展，为杨辉、李冶、秦九韶、朱世杰等人把我国的传统数学推向高峰起到非常重要的过渡作用。南宋景定二年（1261 年），此时，南宋王朝也面临灭亡，在鲍澣之刊刻算经近五十年之后，杨辉特意把鲍澣之的《九章算术》序作为自己的著作《详解九章算法》的序言，以志纪念。

“算经十书”（尤其是《九章算术》）是祖国数学和数学思想的珍贵宝藏，其本身实际上已经形成具有鲜明特色的模式和传统，它们对整个中华民族和区域性的文化和文明都产生了广泛而深远的作用。八闽数学及数学思想的发展，正是在这个基础上延伸和拓展开来的。

[①] 谢水顺等.福建古代刻书[M].福州：福建人民出版社,1997.133

第二章　宋代八闽的天文数学和工程数学

中国传统数学的特色之一是它与天文历法的研究紧紧地联系在一起。这也是中国传统数学思想的重要特色。八闽传统数学思想亦具有此特色。中国传统上天算的研究共存相依，联动推进，在宋代达到高潮。在宋代，由于数学计算、天文观察、机械设计、仪器制造的巧妙配合，出现了在福建人苏颂领导下设计、制造的世界上第一座天文计时仪器——水运仪象台。水运仪象台是天文仪器中的极品之一，《宋史》称其"前此未有也"。[①]南宋著名学者叶梦得也称赞水运仪象台"制作之精，皆出前古"[②]。

建造水运仪象台不仅需要高超的天文历算知识，也需要高水平的工程数学知识。本章将以介绍苏颂的工作为中心，从水运仪象台和《新仪象法要》[③]的整理和研究出发，阐述宋代八闽科学家们的天文数学与工程数学的成就与思想。

第一节　厚积薄发的历程

苏颂是宋代著名的政治家，他曾任宰相，位极人臣，朱熹称他："赵郡苏公，道德博闻，号称贤相，立朝一节，始终不亏"[④]。他又是一位伟大的科学家，李约瑟认为他是"中国古代和中世纪最伟大的博物学家和科学家之一"[⑤]。对于这样的一位伟大人物，历史是不可能忘记他的。《宋史》第三百四十卷用很长的篇幅[⑥]为他立传，他的出生地、任职地的人们都以有他这样的人物为荣，纷纷为他立传。

一、苏颂的生平

苏颂[⑦]，字子容，宋真宗天禧四年（1020年）出生于福建同安（今厦门市同

① （元）脱脱等.宋史,卷三百四十,第 31 册 [M].北京:中华书局,1977.10859~10866.
② （南宋）叶梦得.石林燕语[M].北京：中华书局，1984.134.
③ 本文中引用的《新仪象法要》为中华书局 1985 年版。此版据守山阁丛书本影印。
④ 芦山堂题词[Z]。芦山堂在厦门市同安县苏颂故里，是苏颂的纪念堂。
⑤ 芦山堂题词[Z]。
⑥ （元）脱脱等.宋史,卷三百四十,第 31 册 [M].北京:中华书局,1977.10859~10866.
⑦ 苏颂生平据下列史料编写：
1、《宋史・苏颂传》。见：（元）脱脱等.宋史,卷三百四十,第 31 册 [M].北京:中华书局,1977.10859~10866.
2、颜中其.苏颂年表[A].苏颂.苏魏公文集[M].北京：中华书局,1988.1223-1259.

安县）的一个官宦之家。父苏绅，当时在江苏丹阳为官。苏颂早年随父亲徙居丹阳。苏绅是一位博学之士，从小对苏颂的教育非常严格。

宋仁宗庆历二年（1042 年），23 岁的苏颂考中进士，调任汉阳军判官，未到任，而改任宿州观察推官。庆历四年苏颂 25 岁，任江宁县知县。庆历六年苏颂 27 岁，苏绅去世。苏颂为其父守灵，卜居丹阳。

宋仁宗皇佑元年（1049 年）前后，苏颂守孝期满，任南京（治所在今河南商丘市南）留守推官。皇佑二年，欧阳修知应天府（府治在当时的南京）。欧阳修对苏颂非常器重，政事方面常请苏颂出谋划策。

皇佑三年（1051 年），32 岁的苏颂因政绩甚佳，迁任大理寺丞。不久又得到举荐，被任命为官阁校勘，不久，宋仁宗至和元年（1054 年）又兼任同知太常礼院。以后还兼任过殿中丞、太常博士等职务，但主要都是编校古籍，共 9 年。至宋仁宗嘉祐五年（1060 年）才结束整理古籍的漫长生涯。在这 9 年中，苏颂利用能见到皇家图书的大好条件，读了很多书，学识不断增长。他廉洁稳重自守，当时的丞相对他十分赏识。

宋仁宗嘉祐六年（1061 年），根据苏颂本人意欲离开京城的请求，任命他为颍州（今安徽凤阳县）知州。直到宋哲宗治平元年（1064 年）初召回，在京城任三度司支判官。治平四年（1067 年），他第一次参与外交事务，任辽国使臣的伴送使；宋神宗熙宁元年，被任命为淮南转运使，当年五月被召回，为皇帝修起居注，并升知制诰、知通进银台司、知审刑院等职务，深得神宗皇帝的信任。

熙宁四年（1071 年）苏颂出任外任知婺州（州治所在今浙江金华）。熙宁六年，知亳州（治所在今安徽亳州市）。熙宁七年后又召苏颂回京，加集贤院学士。熙宁八年，知应天府，熙宁九年，知杭州。熙宁十年，被召回编修国史。

神宗元年初（1078 年）苏颂代理开封府知府，被御史弹劾，被贬濠洲（今安徽凤阳县）任濠洲知州，不久苏颂因受别人牵连，又被免职，但是皇帝对他还是信任不减，不久又任命他为沧州（今河北沧县）知州。

元丰四年（1081 年）年已花甲的苏颂，又奉召到京城任职。元丰七年，母亲陈氏夫人去世，苏颂守丧三年。

宋哲宗元祐元年（1086 年），皇帝下诏命苏颂建造新的浑仪。第二年改任苏颂为吏部尚书兼侍读学士。同年八月十六日，皇帝下诏开始水运仪象台的研制工

作。元祐三年（1088年）“小样”制作完成，并开始制作“大木样”。当年十一月完成“大木样”。元祐四年苏颂被任命为翰林学士承旨，元祐五年五月任尚书左丞，并摄行枢密院枢密使的职务。元祐七年（1092年），水运仪象台竣工。同年六月，73岁的苏颂先后任右光禄大夫守尚书左丞，左光禄大夫守尚书右仆射兼中书侍郎等职位。他终于登上了丞相高位，掌管全国的行政大权，以后以“年老多病”为由，坚决要求辞官。

元祐八年（1093年）3月，苏颂被免去职务。半年后出任扬州知州，元祐九年又被调作到西京河南府（治所在今河南省洛阳市）知府，他极力推辞不去，要求离开政界。大约在这一年他即开始潜心撰写《新仪象法要》一书，三年后全书完成。

哲宗绍圣二年（1095年）苏颂再次告归，他被批准可以在国内任何地方居住。他回到了润州，此时已76岁了。

建中靖国元年（1101年）苏颂在润州逝世，享年82岁，死后赠“魏国公”，崇宁元年（1102年）11月被安葬于江苏丹徒县义理乡乐安亭五州山之东北阜。

苏颂是一位百科全书式的科学家，他主持研制了水运仪象台，著有《新仪象法要》、《本草图经》等重要的科技典籍，并遗有《苏魏公文集》72卷、《华戎鲁王信录》234卷等著作。

二、苏颂的学术成长之路

苏颂家学渊源，父亲苏绅和叔父苏绎通历数之学。苏家有学习天文学的传统。据苏颂的孙子苏象先回忆：“祖父云：吾曾祖代国夫人归曾祖时，赍装中有北极北斗四圣象，奉事甚严。自是吾家每至上七日，必食素，设午茶酒果灯烛，奏冥币焉。”[①]这反映了他们敬奉天道的心情。

在他们家中，就有一个浑天仪的小模型，[②]在这种环境中成长，苏颂的天文学兴趣也不断增长。苏绎去世后，苏颂在他的墓志铭中称他：“专精文史、阴阳、星历、占筮、术数。百家之言，靡不精造”[③]。

在这种环境熏陶下，苏颂终生热爱历算之学。他十六岁时随苏绅在扬州，苏

① 《谭训》卷九[A].苏颂.苏魏公文集[M].北京：中华书局,1988.1169.
② （南宋）朱弁《曲洧旧闻》卷八第十页正面。转引自：李约瑟.中国科学技术史,第四卷,天学第一分册[M].北京：科学出版社,1977.56.
③ 叔父卫尉寺丞景陵府君墓志铭[A].（宋）苏颂.苏魏公文集,卷六十二[M].北京：中华书局,1988.946.

绅命作《夏正建寅赋》，赋成，苏绅称赞说："夏正建寅无憾事矣，汝异时当以博学知也"[①]。

十九岁考进士时，他为考试作的赋文是《斗为天之喉舌赋》。赋文虽然做得很好，但是"点检试卷者谓以声'闻'去为'闻'平，为不合格，遂黜"[②]。宋仁宗庆历二年（1042年）时，苏颂高中进士。他的应试文章为《历者天地之大纪赋》。在这篇赋文中，他旁征博引，将历法的起源、历法的内涵、历法的推算、天文观测等有关历法方面的内容用非常优美的赋文表述出来。苏颂以此文高中，喜不自胜。之后，他更加留意天文历算之学。

可以看出，苏颂所作的三篇赋文都与天文历法有关。天文历法的学习伴随着他的早年成长。

苏颂在宦游中，与他人常常有诗文来往，在他的诗文中也经常使用一些天文术语。这样的诗翁福清录有数首[③]："上国房心次，仙都太紫微"（《苏魏公文集》卷一《元日鸿关宫朝拜二十韵》）；"我昨来余杭，孟陬值杓建"（《苏魏公文集》卷四《次韵蒋颖叔全部游介亭望湖山》二十四韵）；"几回留客舍，四纪度星躔"（《苏魏公文集》卷一一《次韵杨立之见别》）；"几夕华星动紫躔，少微光入太微垣。"（《苏魏公文集》卷一《开府潞公太师得谢西归谨赋七言四韵诗》之一）；"四户贵同公鼎重，九门高共斗杓携"（《苏魏公文集》卷一二《诸公唱和多记经历之事周感昔游复用元韵凡之首》之一）。从这里可以看出，苏颂善于学习，把学习融入到生活和工作中去了。

苏颂还曾出使过契丹（即辽国，1077年）。与辽国的有关官员讨论过两国的历法，当时辽国的历法与宋朝的历法相差一日，辽国人请他评判两国历法的优劣，苏颂断定辽历的推算是正确的，但又不好公开承认。他虚以委蛇，并慢慢地说："历家算术小异，迟速不同。如谓亥时节气当交，犹是今夕，若数刻，即属子时为明日矣。或前或后，各从本朝之历可也。"[④]辽国人惊异于他的妙论，并点头称是。这件事在宋人邹浩的《道乡集》卷三九《故观文殿大学士苏公行状》和叶梦得的《石林燕语》中也有记载。

---

① （宋）苏颂.苏魏公文集[M].北京：中华书局,1988.1090~1091

② 同上

③ 翁福清.苏颂生平事迹研究(A).杭州大学历史系宋史研究室.宋史研究集刊[C].杭州：浙江古籍出版社,1986.295.

④ （元）脱脱等.宋史,卷三百四十,第31册[M].北京：中华书局,1977.10864.

苏颂天资聪颖，也勤奋好学。《宋史》称其："平生少睡，虽三鼓枕，至五鼓不复瞑"。在不断的学习中，他积累了广博的知识，成了一位伟大的博物学家。《宋史》称赞他："自书契以来，经史、九流、百家之说，至于图纬、律吕、星宿、算法、山经本草，无所不通。尤明典故，喜为人言，滔滔不绝。廷有制作，必就正焉"[①]

此外，宋代的学术环境在历代封建王朝中也是比较好的。宋代的统治者在"王者虽以武功克定，终须用文治致治"的思想指导下，实行"佑文"政策，对知识分子的思想言论的控制相对宽松。因此，学者们的思想比较活跃，这是宋代我国封建文化发展到最辉煌的时期的重要原因之一。苏颂作为社会精英中的一员，与当时的其他社会精英进行了广泛的交流。他是欧阳修的学生、苏东坡的诗友、王安石的同榜进士，也是另一位大师级科学家沈括的朋友。在这种淳厚的思想氛围之中，他能博采众长，奋发进取，终于成就了一代旷世奇才。他厚积薄发，终于在晚年，成就了科学史上的伟业——成功研制水运仪象台。

第二节 水运仪象台和《新仪象法要》

苏颂天算知识的大量储备，终于在晚年他领导建造水运仪象台的时候派上了用场，元祐元年（1086 年）冬十一月，苏颂"诏旨定本、新旧浑仪"[②]。他立即召集日官（史官）、检详官赶赴翰林天文院和太史局两处查勘新旧浑仪。他们发现宋神宗熙宁年间沈括组织建造的熙宁旧仪，"环器怯薄，水趺低垫，难以行使"[③]；而宋太宗至道年间韩显符组织建造的至道仪与宋仁宗皇祐年间周琮、舒易简组织建造的皇祐新仪"并堪行用"。在这种情况下，建造新仪被提上了议事日程[④]。朝廷在第二年（元祐二年八月十六日）置局造仪，正式启动了建造水运仪象台的工程。水运仪象台于元祐七年（1092 年）竣工。

一、水运仪象台

水运仪象台[⑤]的形状和结构，可以王振铎先生的复原品（如图 2－1）作参考。

---

① （元）脱脱等.宋史,卷三百四十,第 31 册[M].北京:中华书局,1977.10867.
② 《进仪象状·新仪象法要》
③ 《进仪象状·新仪象法要》
④ 《进仪象状·新仪象法要》
⑤ 可参考：王振铎.科技考古论丛[M].北京:文物出版社,1989.235~274.

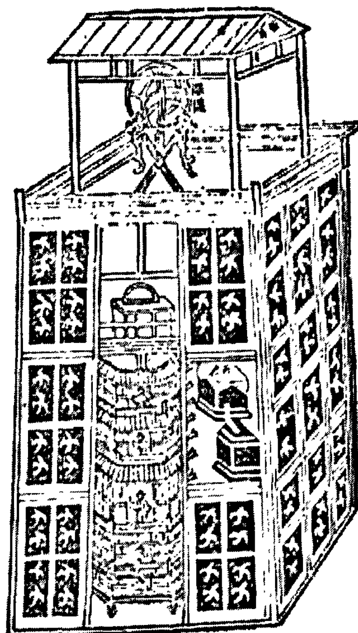


图 2-1

水运仪象台原台总体尺寸，以宋代木矩尺计算高是三丈五尺六寸五分（合 12 米弱），宽度是二丈一尺。从台基到露台的台面是二丈一尺四寸五分。全台呈正方形，上窄下宽的木构建筑，四面以木为柱，共分 3 层。

在水运仪象台的下层设有向南的两个门，靠北面的位置是打水人搬动轮舵，操作站立的地方。在它的前面，有一组车水机械，即升水下轮、升水下壶、升水上轮、升水上壶、河车、天河。在这一组打水机械的东面是天池和平水壶。在台的中央即枢轮，它的直径大约是一丈一尺，它是全台的原动力，是由 72 条木辐，挟持着 36 个水斗和 36 个勾状铁拨子组成的水轮。在枢轮顶部附设一组称谓天衡、天关、天权和左右天锁的杠杆装置，控制枢轮匀速转动。在枢轮的下部设有退水壶，而后使退下的水再流到升水下壶去。枢轮联着枢轴，带动着两套齿轮系统，分别驱动浑仪、浑象及计时装置，而带动浑仪的长轴是天柱，天柱的总长为一丈九尺。

在天柱之南有一套所谓昼夜机轮的装置，它与古代走马灯的结构原理相似，一直伸到中层，带动浑象，同时带动水阁中的机轮，现将底层的装置介绍如下。

先从底层的最上面说起，由上向下，第一层木阁为昼夜钟鼓轮，上有不等高

的三重小立柱，可以拨动3个木人的拨子，以关拨作用拉动木人手臂；到一刻钟时，木人击鼓，时初时摇铃；时正时扣钟。

（右昼夜钟鼓轮，在木阁第一层内。右木阁第一层，开三门。每时初，既服绯司辰于左门内摇铃；刻至，即服绿司辰中门内击鼓；时正，即服紫司辰右门内扣钟[①]）

昼夜钟鼓轮为了“上应百刻，十二时”，这就要求“机轮六百牙距。”宋代每天分十二时辰，每时辰又分时初、时正，因此，每天实际上分二十四个小时；另外每天又分一百刻。为了报时报刻互不影响，必然要求机轮的齿数同时是24和100的倍数，最好是二者的最小公倍数。而设计的机轮的齿数600恰好是24和100的最小公倍数，设计得多么巧妙！

第二层木阁为昼夜时初正司辰轮。轮辋边挂有24个司辰木人，手执时辰牌，牌面间隔书写12支数初正，如子正，丑初，丑正……亥正等。

（右昼夜时初正司辰轮，在木阁第二层；右木阁第二层，正中开一门，每机轮转则昼夜时初正司辰转动。时初，则服绯司辰执牌出报；时正，则服紫司辰执牌出报）。

第三层木阁为报刻司辰轮。轮辋边挂有96个司辰木人。除24个木人报时初正外，剩下的木人报刻。如第二层木人转到中门前报子正时，报刻司辰即也出门前报初刻，上下相呼应，其所报刻排列如下，子正：初刻、一刻、二刻、三刻；丑初：初刻、一刻、二刻、三刻；寅正：……

（右报刻司辰轮，在木阁第三层；右木阁第三层，亦正中开一门。每机轮转，则报刻司辰轮动，刻至，则服绿司辰执牌出报。）

第四层木阁为夜漏金钲轮，是由两叠的轮辋制成。上重轮辋有3层的孔洞，是按夏至、冬至、春分、秋分来分度的，犹如今天铣床的分度盘，孔洞中插入更筹木箭杆，按季节分层插入排列。冬至时箭筹排列较密，夏至时较疏，利用箭筹与拨子的作用，拉动木人按更筹击钲报更数。

第五层木阁为夜漏司辰轮，轮辋设三十八司辰木人，这批木人不是固定在轮上的，而是可以移动的。它们的位置根据箭筹的位置来改变，也是随节气来排列。司辰所执牌面书写内容是：日入、昏、一筹、二筹、三筹、二更、一筹……五更……

[①] 《新仪象法要》卷下。下面括号里的引文同样出自《新仪象法要》卷下。

四筹、待旦，一刻……九刻，日出。因为它是宫中用的更漏，为了提早布置朝会，需要较长的待旦时刻，所以它的更筹排列特点是收更较早。

（右木阁第四五层。正中开一门，每日入、昏、五更、待旦、晓、日出木人皆击钲，以应第五层司辰，第五层司辰出报夜漏等。）

在这一组昼夜机轮南面，设有一座木阁，将全部机轮隐藏起来，打开台体的双门，就能看到按时出现的司辰木人和打击乐器动作的木人。这一发明是水运仪象台的重要创造。以上为下层的情况。

中层的情况，除与下层一样设有扶梯外，南北各有内开的门。门外设有栏杆，在中层的南部有浑象一座，此外别无他物。关于浑象，我们在下一节再介绍和说明。

上层台面也叫露台，以露台的周围设有栏杆。中心设有浑仪一座，它在中层浑象的北面。关于浑仪，我们也在下节中介绍和说明。

苏颂发现的得力助手韩公廉对水运仪象台的建成，也起了重要的作用。苏颂有自知之明，他知道自己政务繁忙，对建台不可能事必躬亲。他听说吏部守当官韩公廉，“通《九章算术》，常以钩股法考天度。”[①]他找到了韩公廉，并对韩公廉进行了一番详细的面试，下面是这场精彩面试的情景：

“臣窃思古人言：天有周髀之术。其说曰：髀，股也；股者，表也。日行周径里数各依算术，用勾股重差，推晷影极游，以为远近之数，皆得表股。周人受之，故曰周髀。若通此术则天数从可知也。因说与张衡、一行、梁全瓒、张思训法式大纲，问其可以寻究依仿制造否？其人称：若据算术，案器象，亦可成就。”[②]

韩公廉不久为此撰写了一本《九章勾股测验浑天书》，并制造了一座木样机轮，请苏颂审阅和检查，苏颂认为“虽不尽如古人之说，然水运轮亦有巧思。”[③]于是，他正式让韩公廉作为助手。除韩公廉外，他还“奏差郑州原武县主薄充寿州州学教授王说之，充专监造作兼管勾收支官物。太史局夏官正周日严、秋官正于太古、冬官正张仲宣等与韩公廉同充制度官。局生袁惟几、苗景、张端，节级刘仲景、学生侯永和、于汤臣测验影晷刻漏等，都作人员尹清部辖指画工作。”[④]

在水运仪象台的木样完成之后，又有一位福建人参与了木样的审议工作。这个人是福州人许将。许将（1037～1111年），字冲元，于仁宗嘉祐八年（1063年）

[①]《进仪象状·新仪象法要》
[②]《进仪象状·新仪象法要》
[③]《进仪象状·新仪象法要》
[④]《进仪象状·新仪象法要》

中状元。先后任明州通判，太常丞，判流内铨，翰林学士、开封府知府，蕲州知州，尚书右丞，定州州，吏部尚书，中书侍郎（右副宰相），门下侍郎（左副宰相）等职。许将文武双全，熙宁四年（1071年）辽国以大兵20万压代州境，欲逼迫宋朝割让代州，而轮到当年出使辽国的官员惧不敢行。朝廷改派许将，许将行前到枢密院认真地查阅了有关代州的一切档案，作了充分准备，到辽国后，许将重申代州一向归宋，边界分明，辽国没有理由为此开战。在使辽期间，与辽人比赛箭法，“（许）将先破的。”[①]

元祐四年三月，翰林学士许将等言：“详定元祐浑天仪象所先奉诏制造水运浑仪木样，如试验候天不差，即别造铜器。”后来许将发现“今校验皆与天合。”[②]朝廷才正式铸铜制水运仪象台。许将等人对木样的鉴定反映了朝廷对建造这样的一个大工程的谨慎态度。在水运仪象台完成之后，许将给予极高的评价：“前所谓浑天仪者，其外形圆，可遍布星度；其内有玑、有衡，可仰窥天象。今所建浑仪象，别为二器，而浑仪占测天度之真数，又以浑象置之密室，自为天运，与仪参合。若并为一器，即象为仪，以同正天度，则浑天仪象两得之矣。请更作浑天仪。”[③]

水运仪象台竣工后三十余年，就惨遭灭顶之灾。靖康元年（1126年），金人灭北宋，掠走了水运仪象台。《金史》载：“金既取汴，皆辇致于燕，天轮赤道牙距拨轮悬象钟鼓司辰刻报天池水壶等器久皆弃毁，惟铜浑仪置之太史局候台。但自汴至燕相去一千余里，地势高下不同，望筒中取极星稍差，移下四度才得窥之。明昌六年秋八月，风雨大作，雷电震击，龙起浑仪鳌云水趺下，台忽中裂而摧，浑仪仆落台下，旋命有司营葺之，复置台上。贞祐南渡，以浑仪熔铸成物，不忍毁拆，若全体以运则艰于辇载，遂委而去”[④]。这段记载也为水运仪象台的毁坏添上了一层神秘色彩。水运仪象台被毁之后，有不少人尝试复原。今人王振铎、李约瑟、陈晓、陈延杭都复制过各种各样的水运仪象台，但对如何复原并没有达成共识[⑤]。因此，可以说，水运仪象台的复原至今还没有完全成功。

① （元）脱脱等.宋史,卷三四三[M].北京:中华书局,1977.10908
② （元）脱脱等.宋史,卷八十[M].北京:中华书局，1977.1096
③ （元）脱脱等.宋史,卷八十[M].北京:中华书局，1977.1096
④ （元）脱脱等.金史,卷二十二,志第三,历下,第二册[M].北京:中华书局,1975.523.
⑤ 庄添全等.苏颂研究文集[C].厦门:鹭江出版社,1993.50,51.

二、《新仪象法要》

水运仪象台竣工之时，苏颂立即向宋哲宗呈上奏折《进仪象状》。《进仪象状》被收入到1096年成书的《新仪象法要》的卷首中。《进仪象状》除了介绍他受命主持制作新仪的前后经过以及有功人员名单（本章前面已经介绍）之外，还回顾了历代浑天仪象的得失，并阐述了他的新仪象的特点和优越性，最后请皇帝给新仪象命名。

除《进仪象状》之外，《新仪象法要》全书还分上、中、下三卷。《新仪象法要》是水运仪象台的说明书。卷上说明了浑仪的设计、构造及其发展史。有图17幅，其中总图4幅，即浑仪整体1幅，构成三重浑仪的主要部位六合仪、三辰仪、四游仪各1幅。另有分图13幅，即组成上述三仪的天经双环、阴纬单环等各种环计9幅，余4幅为供人眼窥测的望筒直距及兼有水平仪作用的仪座“水趺”等固定浑仪的部件。以上各分图后的文字说明中，均写清了各部件的制作规格与大小尺寸;卷中介绍浑象的由来、设计、构造和星图。有图18幅，其中浑象仪体总图1幅，组成浑象的六合仪等部分的分图3幅，其余为浑象紫微垣星宿位置图5幅，四时昏晓中星图9幅;卷下描述水运仪象台的总体与分体的构造、功能及工作情况。共有图29幅，为台体总图2幅，目阁、昼夜轮机、枢轮、天衡等分体图23幅，最后附南宋施元之据别人补入的图4幅。卷下有一部分名为“仪象运水法”，具体讲述整个水运仪象台一个工作循环的运转程序[①]。

第三节　苏颂与宋代八闽的天文数学

苏颂的天算成就集中体现在水运仪象台中的天文仪器的研制和《新仪象法要》的卷中记载的星图上。水运仪象台的天文仪器有浑仪和浑天象等

一、苏颂的浑仪

苏颂首先在《新仪象法要》的《进仪象状》中系统地总结了传统的三种天文仪器[②]。

苏颂在检查翰林天文院和太史局发现天文仪器出现名称混乱的现象：“器未

[①] 施若谷.《新仪象法要》评述[J].自然辩证法通讯,2000(4):72

[②] 潘鼐.苏颂及其天文工作[A].庄添全等.苏颂研究文集[C].厦门:鹭江出版社,1993.31~32.

合古，名亦不正"，同时在观测时，"须人手运动，人手有高下，故躔度亦随而移转。"[1]他随即对这种混乱的情况进行了疏理，并明确地把当时的天文仪器分成之类。

"一曰浑天仪，规天矩地，机隐于内，上布经躔，以日星行度察寒暑进退。"这类浑天仪指东汉张衡的"浑天"和唐代开元年间僧一行瓒的"水运铜浑"。这类浑天仪实际上指后来水运仪象台中的浑象。

"二曰铜候仪"[2]。苏颂指出的铜候仪包括翰林天文院与太史局的三旧新旧浑仪。

"又有浑天象"。苏颂认为："浑天象历代罕传其制，惟《惰书·志》称梁代秘府有之，云是宋元嘉所造者"[3]。另外据《惰书》天文志（上）记载："宋文帝以元嘉十三年诏太史更造浑仪。太史令钱乐之依案旧说，采效仪象，铸铜为之。五分为一度，径六尺八分少，周一丈八尺二寸六分少。地在天内，不动。立黄赤二道之规，南北二极之规，布列二十八宿、北斗极星。置日月五星于黄道上。为之杠轴，以象天运。昏明中星，与天相符。梁末，置于文德殿前。至如斯制，以为浑仪，仪则内阙衡管。以为浑象，而地不在外。是参两法，别为一体。就器用而求，犹浑象之流，外内天地之状，不失其位也。吴时又有葛衡，明达天官，能为机巧。改作浑天，使地居于天中。以机动之，天动而地止，以上应晷度，则乐之之所仿述也。"[4]可见元嘉造浑仪其实就是苏颂所指的浑象。

苏颂正本清源，反映了他深厚的天文学功底和渊博的学识。通过对这类天文仪器的精确考证，他系统地总结了我国北宋以前制造候天仪器的经验和教训，从而，使自己制造的新仪，可以"授以古法"[5]可以在古法的基础上提高，使新仪能"二器（浑仪、浑象）而通三用"。[6] 苏颂等人制作的浑仪，主体部分由六合仪、三辰仪和四游仪组成：（浑仪）"其制为三重：一曰六合仪，纵置于地浑中，即天经也，与地浑相结合，其体不动。二曰三辰仪，置六合仪内，三曰四游仪，置三辰仪内"。主体部分下面由龙柱和鳌云五个支承点与座相接，非常稳固，"又植四龙柱于浑下之四维……又置鳌云于六合仪下"。另外"又在四龙柱下设水趺，

[1]《进仪象状·新仪象法要》
[2]《进仪象状·新仪象法要》
[3]《进仪象状·新仪象法要》
[4]《隋书》卷十九，志第十四，天文上
[5]《新仪象法要》四库全书提要
[6]《进仪象状·新仪象法要》

凿沟通水道以平高下"[①]。这是一个巧妙的设计，使安装时浑仪能保持水平状态。这种措施，在我国天文仪器制造史上，还是首次著录[②]。

在制作浑仪时，苏颂回顾了历代浑仪制造的优缺得失："李淳风制六合仪，三辰仪，四游仪，凡三重。六合仪有金浑纬规，其法刘曜时孔挺所增，四游仪即舜璇玑玉衡之遗法也"[③]。

在总结了历代浑仪的情况之后，他决定采用李淳风的浑天仪结构，"今则全用淳风之重之制，而于之辰仪上设天运环，以水运之"[④]。他结合当时的天文观察成就在此基础上进行了一系列的创新[⑤]：

1、"北极出地 35 度少弱"，即为 34° 40′。开封的地理纬度，今测为 34° 48′，与苏颂当年所用元丰实测值两者相关无几。还应注意到，古代开封南端今入黄河，今日开封地面，已高出古代约 7 米。今天 1 度等于当时的 365.25 / 360 度，二者略有差异。

2、六合仪内采用了周琮等人用的天常环，固定了赤道的位置："古无此环，周琮等造之重仪始置之，元丰仪固之，今新仪循用"。当三辰仪转动时，赤道环保持在其内，保持了基本坐标环的准确度。

3、"右黄道双环，今所创也"。苏颂发现"古制惟有赤道，知赤道与天度颇有进退，诏贾逵置黄道"。但是"黄道旧单环外，于北际见太阳，体不全见，以测半日为法。"因为以以前的黄道单环来测量太阳，望筒只能以单环的一个侧面为基准，只能见到半个太阳，所以"今以望筒于黄道双环中全见日体，若仰窥太阳，随天运转，则太阳适周于双环之内。"

4、"右四象单环，今之所创也。"四象单环附着在三辰仪南北极的末端，这样，对三辰仪来说，使整个三辰仪受力均匀，避免天长日久，因转动向心力作用而使机件变形。同时，四点对称，互成力偶，转动省力。所以，苏颂说："（四象单环）与南天运环、黄赤道东西相结，令两交无低垫之患，随天运环运转，与天符合。"

5、"右天运单环，亦今所创也"。宋代在张思训之后，一直没有水力推动的

---

① 《新仪象法要》卷上

② 潘鼐.苏颂及其天文工作(A).庄添全等.苏颂研究文集[C].厦门：鹭江出版社，1993.31~32.

③ 《新仪象法要》卷上

④ 《新仪象法要》卷上

⑤ 参见：潘鼐.苏颂及其天文工作[A].庄添全等.苏颂研究文集[C].厦门：鹭江出版社，1993.

仪象。所以苏颂创天运单环，“附于三辰仪，居于赤道之南。”天运单环其实就是一个齿轮，“其最下动枢轴轮一牙，上动天柱一牙距，天运环转则三辰仪与环俱动，以象天运无穷。[①]”

二、苏颂的浑象和星图

在《新仪象法要》的卷中，苏颂详细介绍了他的浑象并绘有若干星图。在这一卷，苏颂的天算成就得到了进一步的表现。浑象是苏颂等人的创造。苏颂说：“右浑象一座。太史旧无，今仿《隋志》增损制之。[②]”浑象“上列二十八宿周天度及紫微垣中外星官，以俯视七政之运转。”对于浑象的形状和大小，《新仪象法要》云：“体正圆如球，径四尺五寸六分半。”具体而言，浑象的细节可以进一步分为如下[③]：

其一，星官与星数。

在球面上“遍体布二十八宿、三家星”。更具体地说，包括有“中外星官，其名二百四十六，其数一千二百八十一，紫微恒在浑象北，上规星其名三十七，其数一百八十八，二项总名二百八十三，星数一千四百六十四”。这些正是三国吴太史令陈卓以来传统的星官和星数。

其二，球面上绘有天汉，即银河。

其三，黄赤道和二至、三分的位置。

球面上还绘有黄道和赤道。黄赤道的相互位置在《新仪象法要》的卷上早有描述：“黄道出赤道外二十四度弱，去极一百一十五度少弱为冬至。黄道入赤道内二十四度弱，去极六十七度半弱为夏至。其东西与赤道相交，去极各九十一度少弱，为春秋二分”[④]。这是说，黄道和赤道的交角为$23\frac{11}{12}$度$=23^{\circ}34'.4$，并指明了二至、二分的去极度值。已知当时（1084年）黄赤交角的理论值为$23^{\circ}34'.2$。[⑤]则苏颂所采用的黄赤交角值的误差仅$0'.2$，其准确度是很高的。

至于二至、二分的入宿度，苏颂指出：“元丰甲子岁（指1084年元丰七年），冬之日至在赤道斗三度，夏之日至在井九度少弱，春分日在奎初度强，秋分日在

① 《新仪象法要》卷上
② 《新仪象法要》卷中
③ 参见：陈美东.《新仪象法要》中的浑象与星图[A].庄添全等.苏颂研究文集[C].厦门:鹭江出版社,1993.81~94.
④ 《新仪象法要》卷上
⑤ 紫金山天文台.1981年中国天文年历[Z].北京：科学出版社,1980.1

轸七度太弱，定为四正之宿。"[①]而据有关理论推算，1084年冬至日所在宿度应为赤道2.9度，那么，苏颂所取用值的误差仅0.°1，其精度是相当高的。

已知二至、二分的去极度和入宿度，它们在球面上的具体位置便可确定下来，黄道和赤道亦可据之绘出。

其四，关于浑象南、北二极位置。

"旧说皆以纽星即天极，在正北，为天心不动处。今验天极亦昼夜运转，其不移处乃在天极之内一度有半。"[②]这就是说，浑象杠轴北端位于纽星之内一度半（1.°48）处，而杠轴南端则与之相距180°。据研究，北宋元丰年间，理论北天不动处与纽星相距1°.61，则苏颂所取值的误差仅0.°13，其精度也是相当高的。

其五，关于浑象南、北二极出入地度。

"北极出地三十有五度少弱，四回而运之，凡七十度半弱，其度常见于地上，则为紫微恒，……于四时常见不隐，谓之上规。南极入地三十五度少弱，四回而运之，凡七十度半弱，其度常隐于地下，其下星常隐而不见，谓之下规。"[③]这35度少弱实指浑象南北极轴与开封地平面的倾斜度，也就是开封的地理纬度。

按理说，35度少弱（$35\frac{2}{12}$度=34.66°）的2倍应等于70度少强（$70\frac{4}{12}$度），但这里明确无误的记载却是70°半弱（$70\frac{5}{12}$度）。对于这一矛盾，似乎可以作这样的理解：苏颂的心目中，南、北极出、入地度应稍大于$35\frac{2}{12}$度，$35\frac{2}{12}$度仅指约值而言，其更确切的度值应等于$70\frac{5}{12}$度的一半，即$35\frac{5}{24}$度（=34°.70）。已知开封古岳台的地理纬度为34°.80，若与$35\frac{2}{12}$度比较，误差为0°.14，精度已相当高，若与$35\frac{5}{24}$度比较，误差仅0°.10，精度则更高。

苏颂等人将浑象圆球置于地柜中，以本地柜顶面象征地平面，圆球"半隐地

① 《新仪象法要》卷上
② 《新仪象法要》卷上
③ 《新仪象法要》卷上

下，半出地上”[1]，圆球北极轴出木地柜顶面约 $35\frac{2}{12}$ 度，当浑象圆球绕出极轴旋转时，便能很好地演示恒星的隐见状况。

其六，浑象的运转机制。

在木地柜内，设有天运轮、赤道牙等部件，使与水运仪象台的主动轮相衔接，从而达到驱使浑象圆球自动周旋，与天同步的目的。

对于浑象的这一系列内涵，有的比较容易用文字描述，如上述三、四、五等项，有的则难以言喻，如对满天星斗的分布、以黄、赤道在众恒星间的走向等等。为了弥补文字说明的不足，苏颂明智地选择了绘制星图的方法，在这些星图上比较形象、真实、简捷地再现了上述大部分内容。

在苏颂以前，星图的画法有以下三种[2]：

圆图法。它是以天北极为中心，以各恒星的去极度和入宿度为坐标量的极坐标式星图。对这一画法，苏颂作为了相当中肯的评价："圆图视天极则亲，视南极则不及"，"近北，星颇合天形；近南，星度当渐狭则反阔矣"[3]。即认为依圆图法，对于北极附近的恒星的相对位置失真较小，但离开北极越远，恒星相对位置的失真也越大，特别是过了一球赤道后，变形则更大，以致造成恒星间的间距理当渐小，而在星图上则表现为渐大的不良效果。

横图法。它是以去极度为纵坐标，28 宿度为横坐标的直角坐标式星图，纵坐标的零点即为赤道。对此，苏颂亦有极得当的评述："横图视列舍则亲，视两极则疏"，"去两极星度皆阔，失天形矣"。即以依横图法，对于赤道附近的恒星的相对位置表达得比较好，但越接近两极，失真则越大。

圆横图结合法。它把北极周围紫微垣附近的恒星画成圆图，又把赤道两侧的恒星画成横图，即取圆图、横图二种画法的优点而用之，从而较好地克服星形较大失真弊病。这种画法至迟出现于唐初、著名的敦煌星图就是依据此法绘成。[4]

苏颂在《新仪象法要》中共绘有星图五幅："浑象紫微恒星之图"、"浑象东北方中外官星图"、浑象西南方中外官星图"、"浑象北极图"、"浑象南极图"。在这五幅星图中，前三幅为一组全天星图，后二幅则又为一组，这二组星

[1]《新仪象法要》卷中
[2] 陈美东.《新仪象法要》中的浑象与星图(A).庄添全等.苏颂研究文集[C].厦门:鹭江出版社,1993.81~94.
[3]《新仪象法要》卷中。
[4] 席泽宗：敦煌星图（J）.文物，1966（3）

图均缺南极附近的星宿。另外，还有“四时昏晓中星图”九幅，这九幅图虽称为星图，但图上并没有画星星。

对苏颂《新仪象法要》中星图，陈美东先生有较详细的研究[①]。李约瑟先生对苏颂的星图赞赏不已：“欧洲在文艺复兴以前，可以和中国星图制图传统相提并论的东西，可以说很少，甚至还没有。”“蒂勒（Thiele)、布朗(B.Brown) 、《科学史导论》的作者萨顿(Sarton)都认为，直至14世纪末年，除了中国的星图以外，再也举不出别的星图了。”[②]

苏颂能在当时绘制出这样的星图，除了需要很好的天文观测数据之外，还需要很高的数学水平。把天上的星星在平面上表示出来，必须要采用坐标方法和复杂的数学计算。苏颂的星图是我国古代坐标几何思想的进一步发展。

除苏颂以外，宋代八闽还有许多天算家，在本章第五节再集中介绍他们。

第四节　苏颂与宋代八闽的工程数学

建造水运仪象台是一个非常复杂的工程，如果没有数学的全方位的应用，要完成建造是不可想象的。

一、数学在水运仪象台传动装置中的应用

我们根据刘仙洲先生的研究成果[③]介绍水运仪象台的传动装置（如图2-2)：

[①] 见陈美东的研究成果：陈美东.《新仪象法要》中的浑象与星图(A).见庄添全等.苏颂研究文集[C].厦门:鹭江出版社,1993.81~94.

[②] 李约瑟.中国科学技术史,第四卷,天学第二分册 [M].北京;科学出版社,1975.253.

[③] 刘仙洲.中国工程机械分明史[M].北京：科学出版社,1962.111-113. 或参见：卢嘉锡,陆敬严,华觉明,钱小康,张柏春.中国科学技术史（机械卷）[M].北京：科学出版社,2000.160-163..

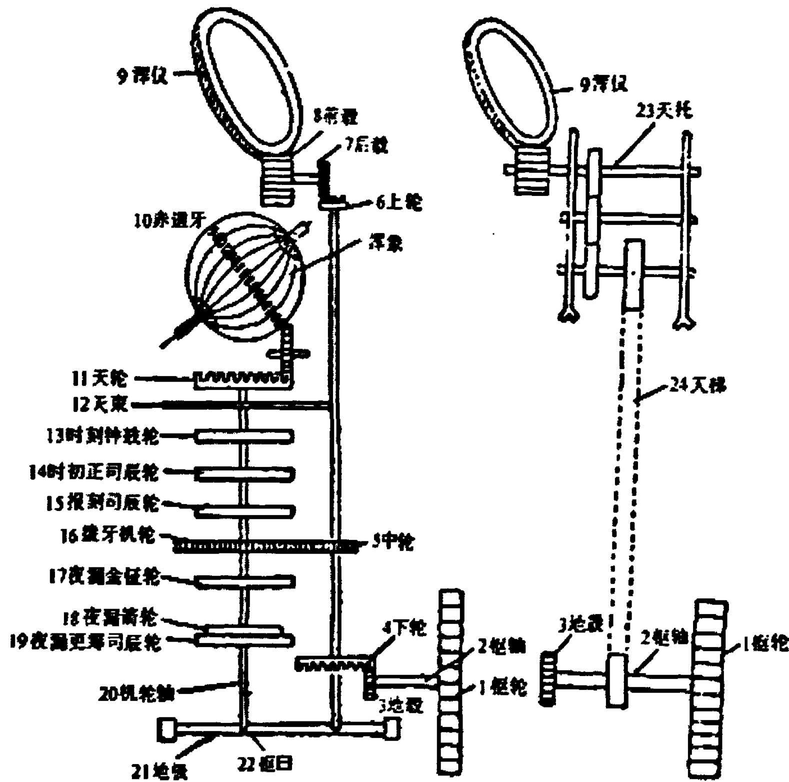
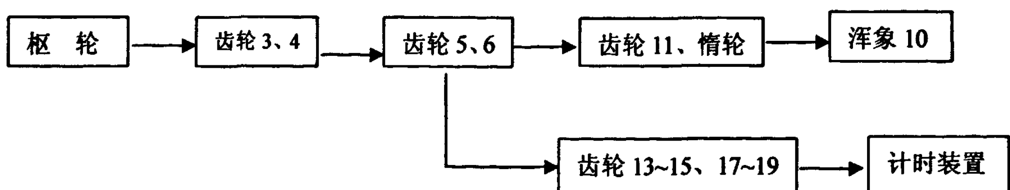


图 2—2

这两套轮系的起点是枢轮，其终点分别是浑仪和浑象。带动浑象的轮系，同时带动计时装置。轮系的作用：一是分动，二是减速，所以传动装置比较复杂。现将其传动装置简介如下。

1、第一套齿轮系统

这是套由枢轮带动浑象轮系，传动过程下：



《新仪象法要》一书，给出了一部分齿轮的齿数，如说齿轮 16 和齿轮 11 有 600 个齿（$Z_{16}=Z_{11}=600$），有的齿数书中并未给出，刘仙洲先生的研究做了补充，如说浑象每天周转一周。所以浑象一定也是 600 个齿（即 $Z_{10}=600$），并假定齿轮 3 及齿轮 5 的齿数均为 6（即 $Z_3=Z_5=6$），齿轮 4 的齿数为 96（即 $Z_4=96$），则枢轮的转数即可求出。枢轮到浑象的传动比为：

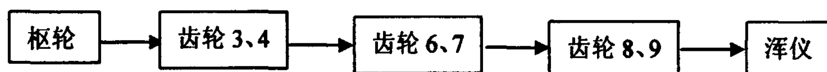
$$i_{3、10}=\frac{\omega_3}{\omega_{10}}=\frac{n_3}{n_{10}}=\frac{Z_4\times Z_{16}\times Z_{10}}{Z_3\times Z_5\times Z_{11}}=\frac{96\times600\times600}{6\times6\times600}=1600$$

即每小时候 $66\frac{2}{3}$ 周，这就是枢轮转动的速度。

齿轮 16 同时带动五层木阁动作，所以每层木阁中的齿轮也为每昼夜一周。它们分别带动了木阁中的木人动作（其中齿轮 18 与重叠，这当是于出于自动控制的需要）。《新仪象法要》一书中介绍了各层木阁中的动作，如木人如何开门表演，木人的衣着等（见本章第二节）。

2、第二套齿轮系统

第二套齿轮系统是枢轮带动浑仪工作，传动过程如下：



齿轮 6 有 3 个齿（即 $Z_6=3$），同时齿轮 7 和 8 齿数相同（即 $Z_7=Z_8$），而枢轮每天回转 1600 周（即 $Z_3=1600$），浑仪上的天运轮（即齿轮 9）每天回转一周，齿数即可求出。枢轮到浑仪之传动比：$i_{3、9}=\frac{\omega_3}{\omega_9}=\frac{n_3}{n_9}=\frac{Z_4\cdot Z_7\cdot Z_9}{Z_3\cdot Z_6\cdot Z_8}=1600$

则浑仪上天运轮之齿数：$Z_9=\frac{1600\times3\times6}{96}=300$，即浑仪上天运轮之齿数为 300。

上述齿轮传动系统是照刘仙洲所著《中国机械工程发明史（第一编）》中的介绍叙述的。但是书和图与王振铎先生的复原品有些不同。在第一套齿轮是一惰轮，它并不影响传动比数值，只影响浑象 10 的旋转方向，而正确地决定枢轮的转向，即可解决这一问题。王振铎先生认为，没有该齿轮，这从结构上想些办法也可解决问题。此外，王振铎先生复原品齿轮齿数，也和刘仙洲先生的介绍有些

不同，但他们对轮系基本看法是一致的。

3、另一种传动装置

在《新仪象法要》（卷下）中，还给出了第2套轮系的另一套传动装置。这套传动装置中运用了链传动，它的传动过程如下：



《新仪象法要》记载中，多有未详见之处，如水运仪象台的总体尺寸，一部分齿轮的齿数，枢轮的回转速度，漏壶的恒定流理等。但只要知道了水运仪象台的运动规律，这些数据是可补足的。这也从另一个侧面反映了苏颂等人的数学成就。

水运仪象台的传动系统是一个主要由齿轮组成的复杂系统。如果事先不进行严密的设计和计算，那么要么齿轮之间根本不能很好地配合，从而导致系统无法发挥候天功能；要么虽然齿轮间能够配合，但系统却无法稳定的运行。比如，如果某个齿轮的齿数多一个或少一个，就会差之毫厘，失之千里，仪象系统根本不能与天道相合；又比如，如果某个齿轮的齿在轮缘排列不均匀整齐，那么系统运行不久就会崩溃。所有这些，严密精确的计算是前提。

水运仪象台是以枢轮为全台的动力，而枢轮是以水循环不息来驱动的。为保证枢轮能匀速运动，在枢轮上有一自动控制系统，它与日后西方钟表中广泛采用的擒纵机构相同。通过轴与齿轮啮合，枢轮一方面带动浑象演示天象，同时带动计时装置准确报时报刻；另一方面枢轮还带动浑仪以观测天体，这样就组成兼有浑仪、浑象和计时装置的水运仪象台。因此，水运仪象台是一个非常复杂的装置。李约瑟先生说过：

> 同中古时期制造的工艺的一般概念相反，新天文钟不是用试凑法来完成的。而是依据（苏颂和）韩公廉所能运用的全部几何知识，事先从备忘录里完整规划出来的。这样当然会令人易于明白，齿轮链条传动和其他机件是怎样制造才好胜任连续而平稳驱动重达10到20吨的浑仪以及直径为4 .5英尺的浑象的。[①]

李约瑟先生认为制造水运仪象台需要对几何学知识的高超应用，对这一点，

[①] [英]李约瑟.中国科学技术史,第四卷,物理学及相关技术（第二分册）:机械工程[M].北京:科学出版社,1999.522.

我们下面立即开始探讨这个问题。

二、苏颂与宋代八闽的工程图学

工程制图是用图样来表示工程设计思想和要求的一种工程语言。因此，它与数学、特别是几何学的联系非常密切，也是一门工程数学学科。

在我国，工程制图和其它科学技术一样也有着悠久的历史。早在先秦时代，我们的祖先就已经用规矩作为工具来制图，并形成了作图的一般方法：规画圆、矩画方。

从秦代到宋代，我国的工程制图学得到了进一步的发展，出现了许多制图专家。其中著名的有东汉的张衡、后魏的信都芳、隋代的何稠等人。张衡是众所周知的历算学家，信都芳虽名声稍逊，但也精通历算。

宋代工程图的表现方法和绘制技术大大超越了前代。科技专著中的工程图样，有用类似正投影方法绘制的正视图；也有用类似透视和等角投影方法绘制的立体图。有的为清楚显示物体结构和表面形状，还注意到零件放置的方位。有的装配部件除总装图外，还有去掉外壳后表示内部结构的剖视图。这些都与现代工程图的表现方式相似。而且，这些图样能比较接近用图解法表现器物、机械设施的形状、大小；还在文字说明部分详述物件名称、高度、宽度、长度、厚度、形制以及容量与重量；有的还包括物件所用材料、加工工艺、装配方法等，和我们今日所称的施工用图相去不远，形和数的结合，使宋代工程制图摆脱了旧有的绘画形式，是工程制图形成学术体系的重要标志。李诫的《营造法式》，曾公亮、丁度的《武经总要》，苏颂的《新仪象法要》是宋代工程制图的代表作。曾公亮和苏颂一样，也是福建人，从这里可看出宋代的福建人对工程制图学所作的巨大贡献。

1. 曾公亮的工程制图学成就及思想

曾公亮（999～1078）。字明仲，号乐正。福建泉州晋江人。北宋天圣二年(1024年)进士。历任知县、参知政事、中书侍郎兼礼部尚书、门下侍郎兼吏部尚书、尚书左仆射、昭文馆大学士等职，先后被封为英国公、兖国公、鲁国公。著有《武经总要》、《元日唱和诗》、《英宗实录》等。其中《武经总要》是曾公亮和端明殿学士丁度于康定元年至庆历四年(1040-1044年)承旨主编的一部兵书，共40卷，

分前后两集，着重记述以北宋为主的历代军事组织、边防地理、战略战术、武器制造、古今阵法、阴阳占候、地形地物利用和典型战例等，是中国11世纪一部杰出的军事百科全书，也是世界上最重要的古军事著作之一。其中有世界上最早关于火药配方和工艺程序，以及利用磁场进行人工磁化和掌握地磁倾角的原理制造指南仪器的记述。这些记述具有重要的科技史意义。

曾公亮是苏颂的前辈，与苏颂曾有过交往，曾公亮非常佩服苏颂的为人。《宋史》记载：嘉祐中，诏礼院议立故郭皇后神御殿于景灵宫，颂谓："敕书云：'向因忿郁，偶失谦恭'，此则无可废之事。又云：'朕念其自历长秋，仅周一纪，逮事先后，祗奉寝园'，此则有不当废之悔。又云：'可追复皇后，其祔庙谥册并停。'此则有合祔庙及谥册之义。请祔郭皇后于后庙，以成追复之道。"众论未定，宰相曾公亮问曰："郭后，上元妃，若祔庙，则事体重矣。"颂曰："国朝三圣，贺、尹、潘皆元妃，事体正相类。今止祔后庙，则岂得有同异之言。"公亮曰："议者以谓阴逼母后，是恐万岁后配祔之意。"颂曰："若加一'怀'、'哀'、'愍'之谥，则不为逼矣。"公亮叹重[①]。

《武经总要》前集卷之十攻城法、卷之十二守城、卷之十三器图等三卷有大量的工程图样。曾公亮在《武经总要·器图》中说："历代异宜，形制有异，今但取当世兵械，绘出其形，以记新制云。"在"攻城法"中又说："今采历代攻城之器可施设者，图形于左，以备用云"。大部分军械和火器的图样采用轴侧投影和平行投影的画法。如卷十二的"卧车"、"旋风"、"把车"、"行天桥"等。这些用等角轴测投影绘制的图样，立体感较强。兵器的正面平行于轴测投影面，在投影图上反是非曲直出物体的等比实长和实形。卷十三中的"骑兵旁牌"和"旁牌一种二色"等除用类似平行线投影的画法绘制外，在一张图里用两个视图来反映兵器，犹如现代机械制图的主视图和后视图。这是中国工程图学史上最早应用组合视图的例证。而对于较为复杂的军用器械，绘制者采用了零件图和装配图相结合的方式，如"猛火油柜"。卷十中的"棚绪"，除装配图外，又将"芭盖棚绪"和"芭垂棚绪" 的真实形状绘于一图，并用文字注明各零件名称。

《武经总要》图样的文字说明具备了工程制图应有的技术事项。如卷十二中的"旋风"，其文字内容包括各部零件的技术要求（"（思一极）长四尺五寸，径

[①]（元）脱脱等.宋史,卷三百四十,第31册[M].北京:中华书局,1977.10860.

寸，两头用铁叶裹包”）和实际操作注意事项（“凡一用五十人拽，一人定放，放五十步外，石重三斤，其柱须埋定，即可发石，守则施于城口，占棚左右，手，敌近则用之”）。这些条文简明扼要，并包括图中难以表达的尺寸、形状、安装位置、零部件性能和要求、器械使用功能等等[①]。

2. 苏颂的工程图学成就及思想：

苏颂的工程制图学成就及思想在《新仪法象要》淋漓尽致地表现出来[②]。

《新仪象法要》中的图样内容丰富、完整。除卷中14幅星图外，其他的都是机械图样及图说，阐明所示部零件的原理、材质、形制等。《四库全书提要》称它“图样界画，不爽毫发”，“楮墨精妙绝伦”。据统计，上卷“浑仪”与“水趺”共17图，其中总图1幅，装配图3幅零件图13幅。中卷浑象部总图1同上，零件图19幅，共30多种零件。下卷“仪象台”至“圭表”计图25同上，其中总图2同上，装配图4同上，零件图19幅，计30多种零件。全套图样60幅，有零部件50多种。

由于水运仪象台结构复杂，包括轴、杆、箱体、滑动轴承、水准仪等多种零部件，有锥、柱、环、球和平面等几何形体，几乎涉及机械制图的整个体系。绘图者通过图示和图说，正如《四库全书提要》所赞：“其列巩衡制度，候视法式，甚为详悉”。和宋以前比较，《新仪象法要》的图样，更加规范，更接近于轴测表示方法，如仪象台总图这种画法思想的代表。除此之外，还采用俯视、平视合一的表达方法，如下卷中的“报刻司辰轮”将直立的“司辰”平视图像立面画在轮圆平面上。

在宋代，正投影概念书及图示法因其简便、准确的特点得到更大的发展。《新仪象法要》中多数轮盘类零件图样都符合投影原理，用主视图或示意图表现。它是最早应用正投影原理图系机件的科技专著之一。

《新仪象法要》还打破了传统的一器一图的表现手法，按实际需要将外形与内部结构分别图系。浑仪的总图表示了水运仪象台的外部结构、总体尺度和装饰造型。与之相配合的还有用以说明内部结构、装配关系和工作原理的总装配图。

---

① 卢嘉锡,陆敬严,华觉明,钱小康,张柏春.中国科学技术史（机械卷）[M].北京科学出版社,2000.160-163.

② 这部分参考了下列研究成果：1、管成学,杨荣垓,苏克福.苏颂与《新仪象法要》[M].长春：吉林文史出版社,1991.287-293.。.2、黄德馨,刘克明.宋代机械制图的杰出代表[A]庄添全等.苏颂研究文集[C].厦门：鹭江出版社.1993.95-102.。.3、卢嘉锡,陆敬严,华觉明,钱小康,张柏春.中国科学技术史（机械卷）[M].北京科学出版社,2000.160-163.。

这种表达方法已经蕴含着现代剖视图的基本思想，对后世产生了较大的影响。

为了表达零件在仪象台中的位置和相互关系，《新仪象法要》按其装配关系配置在同一幅图中（如“天柱”、“矢轂”和“枢轴”），配合图说使这三个零件的结构形状和相对位置一目了然。在浑仪总图中，为强调某一部分零件的形状，采用大块涂黑的方法，使之更加醒目。这些绘制手法至今仍为许多机械图册和设计说明书所采用。图样的整体布局，疏密适度，绘制比例恰当。在足以完整地清晰地表达物体形状的前提下，图形一般绘制在图面的下方，名称则位于图形的上方，零部件的名称则注其中或其侧。整个画面的空间布局，给人以稳重舒展的美的感受。

此外，《新仪象法要》的字体工整清晰，整齐美观，是后代印刷字体的重要源头之一。

《新仪象法要》是中国工程图学史上的里程碑，制图源于绘画。《新仪象法要》与《武经总要》中的工程制图相比，更具有科学性，向标准化、专业化方向迈了一大步。在宋代整个工程制图学形成之中，在机械制图领域里，《新仪象法要》的图样达到了最高水平，苏颂为其杰出代表。

苏颂的工程制图虽然有科学化、标准化、专业化的倾向，但与现代科学的工程制图还是有相当的距离。《新仪象法要》中的图样多为直观图和示意图，从图中并不能唯一地确定被绘制的工程构件的形状。现代的工程制图理论是建立在画法几何的基础之上的。画法几何的创始人是法国数学家蒙日（G. Monge）。蒙日是一位军事要塞设计师。大约在1770年，他创造性地用几何方法取代过去在绘制防御工事详图时采用的繁琐算术方法，并得出了画法几何的一些基本原理[①]。蒙日的画法几何是建立在这样的一条分理基础上的：空间上任一点的位置由它在两个互相垂直的平面上的射影（正投影）唯一的确定。蒙日认为，一方面必须把三维图形归约为能在图纸上表示的二维图形。另一方面，必须把如此描绘的立体图形的形状和构形所引起的那些关系全部从这画推导出来[②]。蒙日的理想是建立三维图形与绘在图纸上的二维图形之间的一一对应关系。为此，他发明了图解法，现代的画法几何是这个基础之上发展起来的，蒙日的画法几何由于具有重大的实用意义，在发明之日起多年被作为“军事机密”。蒙日关于画法几何的论文直到1795年才在《师范学校学报》上发表，1798年以《画法几何》的单行本发行。

[①] [英]亚·沃尔夫.十八世纪科学 技术和哲学史[M].北京：商务印书馆,1991.45.
[②] [英]亚·沃尔夫.十八世纪科学 技术和哲学史[M].北京：商务印书馆,1991.45.

工程图样具有运算功能和信息储藏功能。《新仪象法要》的机械图已经起到这样的作用。南宋小朝廷就曾想依据《新仪象法要》为复原水运仪象台作过努力，但限于当时的科学水平，并未成功。《宋史》记载："中兴更谋制作，绍兴三年正月，工部员外郎袁正功献浑仪木样，太史局令丁师仁始请募工铸造，且言：'东京旧仪用铜二万余，今请折半用八千斤有奇。'已而不就，盖在廷诸臣罕通其制度者。乃召苏颂子携取颂遗书，考质旧法，而携亦不能通也"。"其后朱熹家有浑仪，颇考水运制度，卒不可得。苏颂之书虽在，大抵于浑象以为详，而其尺寸多不载，是以难遽复云。旧制有白道仪以考月行，在望筒之旁。自熙宁沈括以为无益而去之，南渡更造，亦不复设焉。"[①]

今人依靠《新仪象法要》的图样和说明基本上复原了水运仪象台，进一步证明了《新仪象法要》中的图学有科学性的倾向，但又无法完全复原，这也证明了《新仪象法要》的图学还没有达到完全科学的地步。

三、苏颂的运筹学思想

水运仪象台在苏颂的领导下，从正式施工到建造完成仅用3年多时间。这不能不说是工程史的奇迹。奇迹的诞生的原因是多方面的：首先，应归功于北宋政府的大力支持和资助，同时也离不开苏颂卓越的领导才能和运筹规划思想。

水运仪象台从施工到建造完成是一个非常繁复的过程。苏颂等人在工程进行之时，必然先在大脑设想种种施工方案，并在这些方案中加以选择。通过有计划合理地安排工程建设中的方方面面，他们高效地迅速地完成水运仪象台的建设任务。

苏颂等人建造水运仪象台，与公元前250年，李冰父子组织修建都江堰工程，与美国现代的曼哈顿计划和阿波罗登月计划比较，虽处于不同的年代，但都是运筹学思想的光辉实践，具有异曲同工之妙。

苏颂的运筹学思想处于自发的阶段，与现代运筹学的方法还是有一定的区别。现时代运筹学形成于二十世纪四十年代，通过数学模型来解决经济建设活动与军事活动中筹划与管理方面的问题。它根据问题的要求，通过数学的分析与运算，作出综合的合理的安排，以达到较经济，较有效地使用人力物力。苏颂是无法达到这样的水平的，但这不能苛求苏颂。由于宋代的科技水平与今天的科技水

[①]（元）脱脱等.宋史[M].北京：中华书局,1977.965-966.

平的巨大差距，他的运筹学思想是无法上升到现代的科学运筹学这个层次的。

第五节 宋代八闽天算的其它史料

1. 王普，闽县人，北宋宣和三年进士。《宋史》艺文志载有他的下列著作："（志第一百五十五 ，艺文一）王普《深衣制度》一卷"；"（志第一百六十 ，艺文六）《小漏款职》一卷，《官历刻漏图》一卷"；"（志第一百五十八，艺文四）《答问难疑》一卷"。对于《官历刻漏图》，四库全书总目云："自序谓：《官历刻漏图》以岳台为顶九服之地。冬夏至画夜刻数或与岳台不同，则二十四气前后易箭之日亦皆少差。"

2. 余嚞，龙溪人。南宋淳熙十一年进士。《宋史》艺文志载有他的下列著作：（志第一百六十，艺文六）《圣域记》二十五卷；《福建通纪》载有下列著作：（福建艺文志卷四十七）《括象志》。《福建通志》（道光版）云："余嚞，（南宋）淳熙十一年进士，任惠浔二州教授，差遣枢密院激赏，尝伏阙上书，论韩侂胄罪，又论边事，力诅和议之非，改通直郎，主管狱词。" 但余嚞有一段时间与韩侂胄打得火热。《宋史》有记载："有余嚞者，上书乞斩朱熹，绝伪学，且指蔡元定为伪党。"[①]韩侂胄是南宋权臣，反对朱熹的理学。

3. 林霆，莆田人。《宋史》记载："（与郑樵）同郡林霆，字时隐，擢政和进士第，博学深象数，与（郑）樵为金石交。林光朝尝师事之。聚书数千卷，皆自校雠，谓子孙曰：'吾为汝曹获良产矣。' 绍兴中，为敕令所删定官，力诋秦桧和议之非，即挂冠去，当世高之[②]。""权臣大恚怒，亦废放以死。"[③]著有《致日经》一卷。《福建通志》（道光版）云："理宗朝召见金华吴莱，赠诗曰：昔在江左国，闽人有林霆，白衣召上殿，口诵《致日经》。"

4. 邹淮，邵武人。《宋史》艺文志记载："邹淮《考异天文书》一卷。" 《考异天文书》已经失传。今《星象考》一卷可能出自该书。《星象考》记载有星数，各星在天空的位置等内容。邹淮曾参与过修改历法。《宋史》记载："（在鲍澣之的《开禧历》颁布不久）嘉定三年，邹淮言历书差忒，当改造。试太子詹事兼同修国史、实录院同修撰兼秘书监戴溪等言，请询渐、澣之造历故事。诏溪充提领

[①] （元）脱脱等.宋史[M].北京：中华书局,1977.12041.
[②] （元）脱脱等.宋史[M].北京：中华书局,1977.12944
[③] （元）脱脱等.宋史[M].北京：中华书局,1977.13223

官，澥之充参定官，邹淮演撰，王孝礼、刘孝荣提督推算官生十有四人，日法用三万五千四百。四年春，历成，未及颁行，溪等去国，历亦随寝。”[①]

5. 邱崇，晋江人。清人周学曾在《晋江县志》记载：“邱崇，工诗文，尤精天文象数之学。尝侍父官惠之河源。时苏轼谪居于惠。崇因得闻其馀论。而李邴亦尝与之唱和。”[②]

[①]（元）脱脱等.宋史[M].北京：中华书局,1977.1947

[②]（清）周学曾.晋江县志：文苑之一 [M].福州：福建人民出版社,1990.1337

第三章 律吕的数理意蕴

中国古代的乐学与律学总称为乐律学。乐学是从音乐实践出发，探讨乐音及音感的相互关系，包括宫调、记谱、乐器法等内容。律学是从发声体振动规律出发，研究乐音的数理关系，包括生律法、律制、定律器（即音高标准器），甚而包括与历法、度量衡的关系。黄翔鹏最早对乐学与律学作出了明确的区分和定义[①]。律学中蕴含着丰富的数学知识和数理思想。在我国古代，律学的起源可以追溯到原始社会的末期，到了明代，朱载堉创造了十二平均律的数学理论，并且制造了按十二平均律的发音的音高标准器，此时，我国的传统律学达到了高峰。朱载堉的伟大创造离不开前朝的积淀，离不开宋代律学家的卓越贡献。宋代的律学虽未处于我国古代律学的高峰，但总体而言，宋代处于我国古代科学的鼎盛时期，在科学的各个领域，人材辈出，律学也不例外。宋代福建人阮逸、蔡元定，是宋代律学家中的杰出代表。他们的律学成就也蕴含着一定的数学思想。

第一节 律算的历史渊源

律学在我国原始社会末期就开始萌芽，早在公元前6000前，我们的祖先就能依声定律，制成骨笛。考古学家在河南舞阳贾湖村发现了16支骨笛。经研究，这16支骨笛是公元前6000年以前新石器时代的遗物[②]。贾湖骨笛制作精美，形状固定，著名音乐史家黄翔鹏先生研究：贾湖骨笛能吹出我国传统的六声和七声音阶[③]。

随着奴隶社会的建立，我国进入了文明时代，礼乐开始成为统治阶级的日常生活的组成部分，音乐的实践比原始社会大大丰富。种类繁多的乐器也随之大量出现。考古学家在山西夏县和襄汾陶寺两地发现了夏代石磬，在河南发现了商代虎纹大石磬，在我国各地发现了商周时代的编钟等等。音乐史家们在研究这些乐器后发现：至迟在武王伐纣时期（前1066年），我们的祖先就能运用十二律并建

---

① 黄翔鹏.中国古代律学[J].音乐研究，1986（4）.111-119.或参见：戴念祖.中国声学史[M].河北教育出版社，1994.138-139

② 河南舞阳贾湖新石器时代遗址第二至六次发掘简报[J].文物.1989(1):1-14.

③ 黄翔鹏.舞阳贾湖骨笛的测音研究[J].文物.1989(1): 15-17.

立了七声音阶。丰富的音乐实践推动着音乐理论的发展。律学作为我国传统音乐理论的重要组成部分也在西周中晚期诞生了。律学的诞生也与当时的数学发展密切联系在一起。戴念祖先生认为："大概在这个时代人们正盼望着一个通晓音乐声学和数学家降生，以期将十二律七声的数学规律揭示于世人了。"[①]

最早的律学理论是三分损益法理论。关于三分损益法的文字记载，最早可能出现在《周语·国语》中；周景王二十三年（前522年），周景王问律于伶州鸠，伶州鸠不仅将十二律的名称告诉了周景王，而且还说：

"律，所以立均出度也。古之神瞽考中声而量之以制，度律均钟，百官轨仪。纪之以三，平之以六，成于十二，天之道也"。[②]

《国语·周语》的记述很简略，不易令人信服。最早详细明确地记载三分损益的数学方法出现于公元前4～3世纪的《管子·地员》中：

> 凡将起五音，凡首，先主一而三之，四开以合九九，以是生黄钟小素之首，以成宫。三分而益之以一。为百有八，为徵；不无有三分而去其乘，适足以是生商；有三分而复于其所，以是成羽；有三分去其乘，适足以是成角。[③]

《管子·地员》给出了五声律数及其计算方法。律数，在我国古代律学中是指各律长度的比例数。在《管子·地员》五声中，宫的律数为 $(1\times3)^4=81$，徵的律数为 $81\times\frac{4}{3}=108$，商的律数为 $108\times\frac{2}{3}=72$，羽的律数为 $72\times\frac{4}{3}=96$，角的律数为 $96\times\frac{2}{3}=64$，

在弦乐中，弦的振动频率与弦长的关系为：$f=\frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$，其中T是张力，m为单位度长的质量，l是弦长。[④]当n=1时，频率最低，称为基频，基频也就是乐器的频率。当n=2时，称为二次谐波等等。二次以上高次谐振波的频率是基频的整数倍。如果T，m取定值，那么弦的振动频率与弦长成反比例关系。在我国传统律学中，各律的律数与弦长（律长）成正比例关系。因此，各律的律数与各

---

① 戴念祖.中国声学史[M].石家庄：河北教育出版社,1994.186.

② 国语·卷三：周语下(上册) [M].上海：上海古籍出版社,1988.132.

③ 管子·卷十九：地员(第五十八) [A].诸子集成[M]

④ 马大猷.声学手册[M].北京：科学出版社,1983.626.

律所对应的弦的振动频率成反比例关系。在弦乐中，我国传统律学的律数这个概念与今天频率这个概念是等价的。

《管子·地员》最早以比较详细的文字记述了以三分损益法计算五声音阶的方法。一百多年后，《吕氏春秋》最早记下了以三分损益法对十二律的计算。《吕氏春秋·音律》写道：

> 黄钟生林钟，林钟生太簇，太簇生南吕，南吕生姑洗，姑洗生应钟，应钟生蕤宾，蕤宾生大吕，大吕生夷则，夷则生夹钟，夹钟生无射，无射生仲吕。三分所生，益之一分上生；三分所生，去其一分以下生。黄钟、大吕、太簇、夹钟、姑洗、仲吕、蕤宾为上；林钟、夷则、南吕、无射、应钟为下。[1]

《管子·地员》和《吕氏春秋·音律》对三分损益法的记述成为后世律学的基础。到了汉代，三分损益法已经非常完善了。《淮南子·天文训》、《史记·律书》、《汉书·律历志》对通过三分损益法求各律的律数、律长有非常完备的记述。

用现代数学语言分析，三分损益法求各律律数的数学公式为 $N_n=N_0\frac{2^{n+m}}{3^n}$，m $\geqslant 0$，N_0为首律（宫或黄钟）的律数。在五律中，一般取 $N_0=81$，此时 n 的取值为 1，2，3，4。N_0在十二律中为黄钟的律数，此时 n 的取值为 1，2，……10，11。无论在五律和十二律中，都要求 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{2^{n+m}}{3^n}\leqslant 1$，因此 m 的取值是有限制的，如当 n=1 时，有且只有 m=0；当 n=2 时，有且只有 m=1，等等。可以证明，对于任意 n，m 的取值是唯一的。根据律数，可以求出各律的律长：$L_n=L_0\frac{N_n}{N_0}$，其中 Lo 为首律的律长。

三分损益法在科学史上地位非常重要。戴念祖先生认为：在人们探索自然现象的历史中，三分损益法是科学史上将自然现象总结为数学规律的最早、最成功的尝试[2]。但三分损益法是无法返宫的，这是它的固有缺陷。所谓无法返宫，是指任何以三分损益法得到的律，都无法和基律成八度，也就是说不存在 n，使得 $N_n/N_0=\frac{1}{2}$。这在数学上是显然的，但是古人在很长一般时间却没有认识到这一点。

---

[1] 吕氏春秋,卷六:夏纪·音律[A].诸子集成本[M].

[2] 戴念祖.中国声学史[M].石家庄：河北教育出版社,1994.170.

他们最初试图通过增加律数来返宫，汉代的京房在八度内在十二律的基础上继续用三分损益法推算，得到了京房六十律。刘宋朝的钱乐之、南朝梁的沈重，又将京房的六十律推演到三百六十律。京房、钱乐之、沈重等人的努力虽然也无法达到返宫的目的，但能使最大音差缩小。在京房的六十律和钱乐之、沈重的三百六十律中，min(Ln-Lo)远远小于十二律的中min(Ln-Lo)，并非常接近于零。因此，六十律和三百六十律能够近似地满足返宫的要求。

无论是六十律还是三百六十律，由于律数太多，虽在律学理论上有一定的意义，但并不具有实用价值。尽管如此，京房、钱乐之、沈重等人的创造为后人祖孝孙、蔡元定等人的在律学上贡献奠定了坚实的基础。祖孝孙的十二律、蔡元定的十八律都是从六十律或三百六十律中挑选出来的。

以三分损益法定律，得到的律是自然律，自然律虽然符合人们的听觉生理，但不符合返宫的要求。只有突破三分损益法的限制，才有可能返宫。在这个方面，何承天、刘焯、王朴、朱载堉等人先后作出了重大的贡献。

何承天（370-447），刘宋朝一代名臣，著名的天算学家，曾制定元嘉历，元嘉历后为祖冲之的大明历所取代，在律学方面，何承天对三分损益法加以改造，创造了新律。

王朴，五代时人。与何承天一样，他并没有根本动摇三分损益法的体系。他的新律也是在三分损益律的基础上适当地调整了十二律的数值后得到的。

刘焯、朱载堉两人非常大胆，他们干脆抛弃了三分损益法的旧体系。

刘焯，隋朝人，字士元，信都昌亭人，相貌丑陋。史称他："犀额龟背。"[1]但人不可貌相。他是我国古代著名的天算学家，对"《九章算术》、《周髀》、《七曜历书》十余部推步日月之经，量度山海之术，莫不核其根本，穷其秘奥。"[2]刘焯创造了二次等距内插法，对天文学和数学的发展意义重大。在律算方面，他进行了打破传统三分损益法定律的尝试。据《隋书》卷十六《律历志》记载：

> 其黄钟管六十三为实，以次每律减三分，以七为寸法。约之，得黄钟长九寸，太簇长八寸一分四厘，林钟长六寸，应钟长四寸二

---

[1] 北史[M].北京：中华书局，1974.2762-2763.
[2] 同上。

分八厘七分之四。[1]

刘焯的十二律的律长可用如下公式表示：$l_n=\frac{63-3n}{7}$（n=0, 1…11）。刘焯的十二律的律长构成了一个等差数列。可以看出，刘焯的定律方法与他在天文学的二次等距内插法在思想上是一致的。但刘焯的方法与实际差距太大，最终失败了。

朱载堉，明代皇室后裔。他也抛弃了三分损益法。他的十二平均律的律长构成了一个等比数列：$l_n=l_0\cdot 2^{-\frac{n}{12}}$（n=0, 1…11）。这是科学史上的一个伟大创造。十二平均律可以自由旋宫转调，完全解决了三分损益法的返宫问题，同时又基本符合人的听觉生理。朱载堉的贡献使我国的传统律学到达了顶峰。

对于管乐，情况就与弦乐大大不同了。

管的声学原理与弦的声学原理有很大的不同。管的频率遵循如下公式：对于开管，$f=\frac{nc}{2(l+x_1+x_2)}$ 其中 1 是管长，x_1=0. 3d 是没有阻碍的开端改正项，x_2=1. 4d 是吹口的端改正项，d 是管的内径，c 为声速；对于闭管，$f=\frac{nc}{4(l+x)}$ 开口端没有阻碍，x=0. 3d, 在吹口，x=1. 4d。[2]

因此，对于管乐器，必加管口校正。根据管的频率公式，管口校正的方法有两种：一种是缩短管长，另一种是缩小管径。在我国古代的律学家中，有些人对这两种方法作了尝试。著名的有东汉的京房，西晋的孟康，隋朝的刘焯，北宋的阮逸和胡瑗，明代的朱载堉等人。朱载堉的制造有三十六律管，这三十六律管是管口校正的杰作。无论管乐弦乐，朱载堉都在成就的高峰。

何承天、祖孝孙、刘焯、朱载堉等人既是律学家，也是数学家。看来，律学的发展和进步是在不断地改进音律的数学模型中取得的。我国传统律学对数学的运用和对数学的推进，是一种重要的科学思想：在律学思想方面意义深刻，在数学思想方面，也有一定的意义。宋代福建人阮逸、蔡元定的律算思想总体上与我国传统的律算思想是一致的。在本章以下部分，我们对他们的律算思想进行详细讨论。

[1] 隋书，第二册，卷十六：律历志[M]. 北京：中华书局，1977. 392.
[2] 马大猷. 声学手册[M]. 北京：科学出版社，1983. 625.

第二节　阮逸的律算思想

一、阮逸生平

阮逸，福建建阳人，《宋史》无传但详细记载了他和胡瑗的乐事活动。明、清两朝的《建阳县志》的人物志中都有“阮逸传”，篇幅不是很长，但与《宋史》参照，可以略知阮逸生平的大致情况：

阮逸，字天隐，宋仁宗天圣丁卯科（1027年）进士。景祐初，阮逸知杭州，向朝庭献所著乐论十二篇。宋仁宗景祐二年（1035年），朝庭欲改乐，皇帝下诏天下求通律吕之人，杭州人郑向举荐阮逸，苏州人范仲淹举荐胡瑗。阮、胡二人开始合作，共同校定钟律。胡瑗（993—1059），字翼之，泰州海陵人，宋代著名的经学家，他曾在湖州授经学。胡瑗的教授法名躁一时，宋史记载：“瑗教人有法，科条纤悉备具，以身先之。虽盛暑，必公服坐堂上，严师弟子之礼。视诸生如其子弟，诸生亦信爱如其父兄，从之游者常数百人。”[①]胡瑗于《宋史》有传。宋仁宗康定元年（1040年），阮逸献《钟律制仪》并图三卷。宋仁宗庆历三年（1043年），朝庭诏置武学，阮逸任教授。不久，武学被废，阮逸任尚书屯田员外郎。庆历末年，阮逸因诗得罪朝庭，被罢官。宋仁宗皇祐年间，朝庭启用阮逸，又准备改造乐器，最初遭到知谏院李兑的反对，李兑认为国家财政困难，改造乐器，必然会增加财政的困难程度。他还特别反对阮逸参与乐事活动，他认为“阮逸罪废之人，安能通圣明述作之事？务为异说，欲规恩赏。”[②]但是，宋仁宗执意要造新乐，不久乐成。在制造新乐时，阮逸以带罪之身又开始了与胡瑗的合作。皇祐五年（1053年）九月，宋仁宗召集近臣、宗室、台谏、省府推判官观赏新乐和新做的晋鼓时，想到了阮逸的才华和对改造乐器的贡献，不久，便恢复了阮逸的官职，并对胡瑗的职位作了升迁。阮逸有一位女儿，才华横溢。《全宋词》收录有她的词《花心动·春词》。

阮逸“邃经学，工词赋”[③]，是一位博学之士，他著述宏富，涉及到多个领域。《宋史》艺文志中记载有他的下列著作：阮逸，《易筌》六卷；阮逸，《皇祐新乐图记》三卷；王通《文中子》十卷，宋阮逸注；阮逸，《野言》一卷。

---

① （元）脱脱等.宋史[M].北京：中华书局,1977.12337.
② 吉联抗辑译.宋明音乐史料[M].上海：上海文艺出版社,1986.77.
③ （清）柳正芳.建阳县志,人物志,卷之六[M].清康熙四十三年刻本.

二、阮逸的《皇祐新乐图记》内容简介

《皇祐新乐图记》[1]是阮逸、胡瑗二人在宋仁宗皇祐五年（1053年）制成钟磬等皇家乐器之后，奉旨而作。据《四库全书》提要称："旧本（《皇祐新乐图记》）从明文渊阁录出，后有宋陈振孙嘉定已亥跋云：借虎邱寺本录，盖当时所赐藏之名山者"。《皇祐新乐图记》在历代的传抄过程中有脱页现象。据《四库全书》提要称："明万历三十九年，赵开美跋叙，是书源委颇详考"。赵开美称，原本记载了在初设局造乐时，朝庭急召阮、胡等人，以及各家在讨论钟律时，各种不同的观点的激烈交锋等情况。但今传本《皇祐新乐图记》对这些均无记载，只能从《四库全书》提要中对此略知一二。

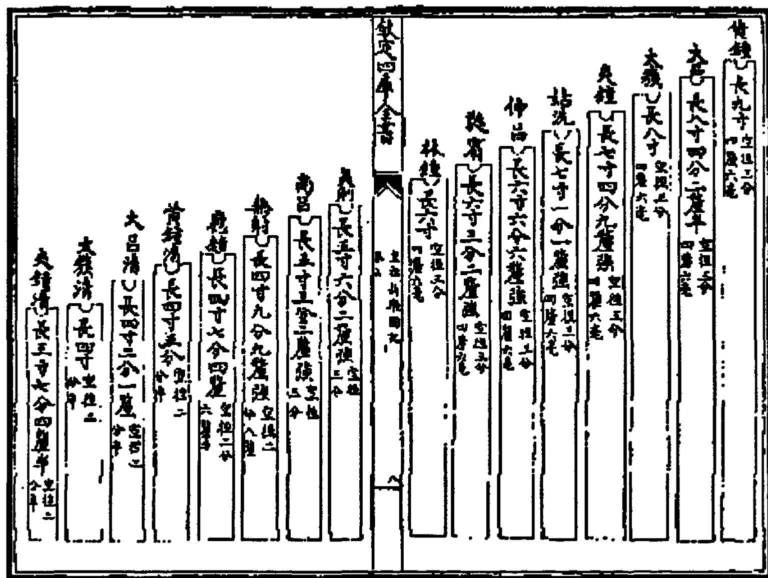
今传本《皇祐新乐图记》共有三卷。卷上首页写有："朝奉郎前尚书屯田员外郎轻车都尉赐绯鱼袋臣阮逸，承奉郎守光禄寺丞国子监直讲同详议修制大乐臣胡瑗奉敕"等字，由此可知，阮逸在写书之时还是带罪之身，并未恢复官职。卷上分五篇："总叙诏旨第一"、"皇祐律吕图第二"、"皇祐黍尺图第三"、"皇祐四量图第四"、"皇祐权衡图第五"。

在"总叙诏旨篇"中，阮、胡二人首先介绍了制造新乐的起因："皇祐二年秋九月大飨明堂，（皇上）复制乐章《成安》等十有四曲"。太常官在调制钟律时发现镈钟特磬等乐器发出的乐音并不协和，需要改造乐器。于是宋仁宗下诏，命阮、胡等人"依详经典、历代制度，用上党柜黍制成律吕度量等法物"。此篇接着介绍了阮、胡二人校定钟磬的情况，阮、胡二人发现镈钟有七处、旧特磬有三处不合《周礼》中记载的古制。在此篇最后，他们回顾了历史上礼乐的状况，阐发了礼乐在国家中的意义和作用，记录了朝庭批准众官员设局造乐的请求。于是在皇祐五年六月，阮、胡二人开始"定模铸造钟磬等两宫架，遂按《周礼》及历代史志立议范金比"。在乐器制成之后，发现"（新乐）其声下太常旧乐一律，众器之音尽合钟磬，其声谐和"。由此可见，他们认为他们制成的乐器在实践中非常成功。

卷上第二篇"皇祐律吕图第二"是全书的精华部分。本篇首先详细考究了《周礼》、《史记·律书》、《前汉书·律历志》三书中关于律吕长短计算的记载，在此

[1] 如果没有特别说明，本章引用的《皇祐新乐图记》采用中华书局1985年版，此版据学津讨原本影印，前有《四库全书》提要。

基础之上，他们给出了他们的研究成果—“律吕图”（如下图，此图采自《四库全书》版《皇祐新乐图记》），最后，阮、胡二人指出了他们的设计律吕图依据：“右臣逸臣瑗谨按《周礼》嘉量法并《前汉志》等计黄钟之管，积八百十一，容一千二百黍。又以《九章》圆田法计之：黄钟管每长一分，积九分，容十三黍三分黍这一，空径三分四厘六毫。”他们发现乐管与“度量衡交相酬验，是以声制粗合古法”。他们认为他们改造乐器已经取得了一定的成功。从本篇中可以看出，他们已经掌握了《九章算术》，并能把数学原理用于制造乐器中去。对“已知圆的面积为 9 分，求半径”这样的问题，他们采用了这样的算法：“置九分，三分益一得十二分，以开方除之得空径之数，不尽二毫八丝四忽。”这相当利用了公式$d=\sqrt{\frac{4}{3}S}$，而今天的公式$d=\sqrt{\frac{4}{\pi}S}$，因此，在这里他们取π=3。正是由于取π=3，他们受到了后人的批评。《四库全书》提要认为：“（他们和范镇）二家算术不精。”实际上，阮、胡二人并不是没有意识到取π=3 所存在的问题。关于这个方面，在本节的后面还要分析。



在“皇祐黍尺图第三”篇中，阮、胡二人考察了《周礼》和《前汉书·律历志》等史书中关于度的记载，发现了历代的“尺之长短有异，而其法与《前汉志》

同。”而《前汉书·律历志》记载：“度者，本起黄钟之长。以子穀柜黍中者一黍之广，为一分，十分为寸，十寸为尺，十尺为丈，十丈为引。”在此基础上，阮、胡制成了两只皇祐标准原尺：一为黍尺，一为铜尺。在制定标准尺时，他们采用了上党羊头柜黍作为标准黍，由此定分寸尺的长短。

在“皇祐四量图第四”篇中，阮、胡二人在考察了《考工记》、《前汉书》、《后汉书》、《周礼》中记载的历代量器之后，制定了皇祐标准量器—龠、合、升、斗。在此篇最后，他们绘制的四个容器的图形，并标出四器的大小尺寸。龠、合、升、斗四器都是底面为正方形的长方体。龠方一寸，深八分一厘，积八百一十分；合方一寸，深一寸六分二厘，积一千六百二十分；升方三寸，深一寸八分，积一万六千二百分；斗方六寸，深四寸五分，积一十六万二十（千）分。

卷上最后一篇为“皇祐权衡图第五”，此篇记述了《周礼》、《前汉书》、《后汉书》关于历代衡器和重量单位的记载，记载了阮、胡二人制作的皇祐标准衡器—铢秤，并绘有铢秤图。

《皇祐新乐图记》卷中分为四篇：“皇祐镈钟图第六”、“皇祐特磬图第七”、“皇祐编钟图第八”、“皇祐编磬图第九”在这四篇中，阮、胡二人仔细研究了《周礼》等书中关于钟磬的记载。他们试图复原《周礼》中的钟、磬、编钟和编磬。值得特别注意的是阮、胡二人在本卷对乐器图的绘制。其中各种乐器的图样非常清晰、精美，图中附有详细的文字说明，据图今人应该可以复原这些乐器。

《皇祐新乐图记》卷下分三篇：“晋鼓图第十”、“三牲鼎图第十一”、“鸾刀图第十二”。与卷中四篇相同，在这三篇中，阮、胡二人仔细研究了《周礼》等书中关于各种礼器的记载。他们试图恢复晋鼓、鼎、鸾刀的原貌，并绘制了这些礼器的图样。

《四库全书》提要对中、下二卷的评价非常高：“中下二卷考定钟磬、晋鼓及三牲鼎、鸾刀制度，则精核可取”。

三、阮逸律学中的数学成就及思想

律学是中国传统文化中特有的学科，在西方的科学或音乐学语汇中没有相应的术语[①]。在律学中，数学知识、音乐学知识、声学融合在一起。数学是律学发

① 戴念祖.中国声学史[M].石家庄：河北教育出版社,1994.139.

展的必要条件。阮逸、胡瑗二人所著的《皇祐新乐图记》中蕴含着重要的科学成就及数学思想。这些主要体现在《皇祐新乐图记》卷上的第二篇 “皇祐律吕图第二”中。

在“皇祐律吕图第二”篇中，我们根据阮、胡二人的“律吕图”[①]可以绘出下表：

律名	长度（寸）	内径（分）	律名	长度（寸）	内径（分）
黄 钟	9	3.46	夷 则	5.62	3
大 吕	8.425	3.46	南 吕	5.33	3
太 簇	8	3.46	无 射	4.99	2.8
夹 钟	7.49	3.46	应 钟	4.74	2.65
姑 洗	7.11	3.46	黄钟清	4.5	2.5
仲 吕	6.666	3.46	大吕清	4.21	2.5
蕤 宾	6.32	3.46	太簇清	4	2.5
林 钟	6	3.46	夹钟清	3.745	2.5

从上表中可以看出，阮、胡二人的律管的长度符合三分损益律。更重要的是他们采用了完全的倍半关系八度值，并且第一次突破了传统的“径三分，围九分”之说[②]。从黄钟到林钟，这八管的“积九分”，他们定空径为3.46分，从夷则到夹钟清这八管，空径由3分逐渐减少到2.5分。另外，从上表还可以看出高低相差八度的律管如黄钟与黄钟清、大吕与大吕清、太簇与太簇清、夹钟与夹钟清等管长成倍半关系。

目前，对阮逸和胡瑗的律学成就鲜有研究。徐飞在对阮逸和胡瑗的律管的数理分析后认为：

> “按我们的理论验算，宋代阮逸、胡缓给出的这套三分损益律管，如果在形制上和我们的推测一致，应该是中国古代在实验声学领域取得的一个具有承前启后意义的重要成果。它不仅首次给出了一套系统的异径律管全部数据与图样，而且通过试验与调试的方法，系统解决了律管发音的管口校

[①] 参见本节第二部分。
[②] 戴念祖.中国声学史[M].石家庄：河北教育出版社,1994.350.

正，以及管律和弦律发音的一致性问题，基本实现了倍半关系两只律管的八度音程，在三分损益律制下，一举实现了“竹声可以度调”的古老理想，使得中国古代三分损益定律法，无论在弦线式定音器还是管式定音器上，都获得了较为圆满的解决方案[①]”。

看来，徐飞认为阮、胡二人取得了很大的成就。但仔细分析后，可以认为徐飞的结论似乎有点牵强，他高估了他们的成就。阮、胡二人的16律管的内径并不是每管逐渐减少，如他们的前八管的内径是一样的，后四管的内径也是一样的。因此，阮、胡二人的十六管并没有全部作管口校正，只是部分律管作了管口校正，但他们的十六管的长度却符合三分损益法。与朱载堉的律管相比，就可以看出阮、胡二人的律管存在着问题。朱载堉制造有三十六管，为了便于比较，我们选取与阮、胡十六管相应十六管的数据绘成下表[②]：

律 名	长度（寸）	内径（分）	律 名	长度（寸）	内径（分）
黄 钟	10	3.53	夷 则	6.299	2.8
大 吕	9.438	3.43	南 吕	5.946	2.72
太 簇	8.908	3.33	无 射	5.612	2.64
夹 钟	8.408	3.24	应 钟	5.297	2.57
姑 洗	7.937	3.14	黄钟清	5	2.5
仲 吕	7.491	3.06	大吕清	4.719	2.42
蕤 宾	7.701	2.97	太簇清	4.454	2.35
林 钟	6.674	2.88	夹钟清	4.204	2.29

可以看出，朱载堉的律管管长符合平均律，管管内径都不同。阮、胡二人没有做到这一点，他们的律管并没有全部作管口校正，这样的律管是不可能实现“竹声可以度调”的古老理想的。虽然徐飞高估了阮、胡二人的成就，但是他用数理分析方法来研究我国传统律学还是很有价值的。

阮、胡二人的创造为朱载堉创立十二平均律具有直接的影响和示范作用。在《律学新说》卷一“密率求周径第六”一节中，朱载堉就明确提到过胡瑗的这套

[①] 徐飞.宋代阮逸、胡瑗异径管律声学成就的数理验证—中国古代三分损益法在律管上的首次成功[J].自然科学史研究 2001（3）.206-214.

[②] 数据来源：戴念祖.中国声学史[M].石家庄：河北教育出版社,1994.358-359.

异径管律，并由此构思启发再次通过实验的方法论证了异径管律的可行性。此外，朱载堉还在《律吕正论》中也多处赞扬阮、胡二人的成就。

从数学的角度看，律学中的数学计算并不复杂，但却蕴含着一个重要的数学思想——函数思想的萌芽，用自然数 1，2，…n，…表示黄钟等诸律，f(n)为诸律的律数。因此律数就是律的函数。律学实质上是依据音律的物理性质建立各种各样的律与律数的之间的函数。阮逸的律学当然也蕴含着数学思想中的函数思想。

阮、胡二人治学非常严谨，在《皇祐新乐图记》中，他们大量引用了古书上关于律学知识的记载，这些记载并未出现庇误。他们试图使他们的制作符合古制，他们不是没有意识到取 $\pi=3$ 的问题，但是由于害怕逾越《周礼》古制，反而被清儒所耻笑。在卷下的“三牲鼎图第十一”篇中，他们用比较精确的圆周率值计算鼎的面积。如圆丘牛鼎，“口径底径俱一尺三寸，深一尺二寸二分，其容一斛”，圆丘羊鼎，“口径底径俱一尺，深一尺三分，其容五斗”；圆丘豕鼎，“口径底径俱九寸，深七寸六分，容三斗”。分析后可知，对于圆丘羊鼎，相当取 $\pi=\frac{1620000}{65\times65\times122}\approx3.1428$；圆丘羊鼎，相当于取 $\pi=\frac{5\times162000}{50\times50\times103}\approx3.146$；对于圆丘豕鼎，相当于取 $\pi=\frac{3\times162000}{45\times45\times76}\approx3.158$。因此，如果认为他们没有意识到 $\pi=3$ 的问题，是没有根据的。阮、胡二人取的 π 值到底为多少，目前无法知晓。从三鼎的尺寸看，口径底径的尺寸数字很规则，而深的尺寸数字不太规则。因此，我们可以推测三鼎深的尺寸数字是计算出来的。今取 $\pi=3.1416$，再分别求三鼎深，可知鹿鼎深为 102.05 分，羊鼎深 103.13 分，豕鼎深 76.39 分。以 $\pi=3.1416$ 值计算三鼎的深度精确到分与阮、胡二人的值完全一致，由此，我们可以断定，阮、胡取的 π 值比较精确。

此外，阮、胡二人对度与律二者的关系的探讨在科学史上也有一定的意义。他们认为“律起于度”。所谓“律起于度”是指音律由度量衡所确定，而“度起于律”则相反。在我国历史上，很早就开始了研究度与律的关系。到了宋代，这种研究到达了高潮，并引发了一场长时间的学术大讨论。参与学术之争的有邓保信、阮逸、胡瑗、丁度、李照、房庶、范镇、司马光、杨杰、刘几等几十人。

这场学术争论在三个方面展开：选用什么样的黍粒；确定什么样的排黍方法；到底是“律起于度”还是“度起于律”。这场争论伴随着乐器的制造而进行。《宋

史》记载："邓保信、阮逸、胡瑗等奏造钟律。"宋仁宗命令翰林学士丁度等人"取保信、逸、瑗等钟律，详考得失"。丁度在仔细考察之后，向皇帝报告了律度的混乱情况："保信所制尺，用上党秬黍圆者一黍之长，累而成尺。……逸、瑗所制，亦上党秬黍中者累广求尺，制黄钟之律。今用再累成尺，比逸、瑗所制，又复不同。……盖黍有圆长、大小而保信所用者圆黍，又首尾相衔，逸等止用大者，故再考之即不同。尺既有差，故难以定钟、磬。逸等以大黍累尺、小黍实龠，自戾本法。[①]"皇帝无所适从，只好下诏对所有人定的度全部不用。

司马光主阮逸之说，是支持"律起于度"派的主将。范镇主房庶之说，是支持"度起于律"派的主将。司马光认为："古律已亡，非黍无以见度，非度无以见律，律不生于度与黍，将何从生？"[②]但两派都无法说服对方，《宋史》记载："光、镇争论往复，前后三十年不决"[③]。

蔡元定支持"度起于律"，下节我们正好写他。对度律的关系，我们将在下节的有关部分继续深入讨论。

第三节 蔡元定的律算思想

一、蔡元定生平

蔡元定（1135-1198），字季通，号西山，福建建阳人，南宋著名理学家、律学家。《宋史》卷四百三十四和《建阳县志》均有传。

蔡元定出生于建阳的蔡氏望族，康熙版《建阳县志》的蔡世家是整个蔡氏家族的传记。蔡元定的父亲蔡发，字神与。蔡发博闻强记，不于世俗相合，早年曾云游四方，因此见多识广。蔡发精于易象、天文、地理。蔡元定生而聪敏，八岁能诗。父亲以二程的《语录》，邵雍的《经世》、张载的《正蒙》教之，并说："此孔孟正脉也。"[④]南宋绍兴二十年（1159年），蔡元定遵父遗命，欲拜朱熹为师，一日往谒，朱熹"扣其所学，大惊曰：'此吾老友也，不当在弟子列！'"[⑤]遂留于门而师事焉，相与讲习凡四十年，"对榻讲论诸经和奥义，每至夜分。

[①] (元)脱脱等. 宋史[M].北京：中华书局,1977.1607.
[②] 转引自：《皇祐新乐图记》的《四库全书》提要。
[③] (元)脱脱等. 宋史[M].北京：中华书局,1977.1918.
[④] (元)脱脱等. 宋史[M].北京：中华书局,1977.12875.
[⑤] (元)脱脱等. 宋史[M].北京：中华书局,1977.12875.

四方来学者，熹必俾先从元定质正焉。”[1]蔡元定成为朱熹最亲近的朋友和学生。乾道六年（1170 年），朱熹在建阳云谷建晦庵，蔡元定亦隐居于西山治学，人称蔡元定为西山先生。

蔡元定多次被荐举入朝为官，均以疾病辞谢不就。绍熙五年（1194 年），宁宗皇帝即位，赵汝愚当政，朱熹被荐上朝任焕章阁侍制兼侍讲时，他们同荐蔡元定，蔡元定亦不出。庆元二年（1196 年），韩侂胄专权，朝廷禁伪学（理学），次年设置伪学党人籍，朱熹、蔡元定等均被列入伪党，即史称"庆元党案"。蔡元定以布衣被黜逐湖南道州舂陵（今湖南道县）。

庆元四年（1198 年），蔡元定病逝于舂陵谪所。噩耗传来，朱熹悲痛万分，两次痛祭元定，在其祭文中写道："呜呼季通，而至此耶！精诣之识，卓绝之才，不可屈之志，不可容之辩，不可复得而见矣"、"若折左肱而失右臂"。1207 年，韩侂胄被诛。嘉定三年（1210 年），朝庭为蔡元定平反，追赠蔡元定为迪功郎。几十年后，蔡元定的孙子辈有人做了高官，蔡元定的封号也越来越大，宝佑三年（1255 年），他被赠太子少傅，此后，又被追赠太子太傅等。南宋名相文天祥仰慕蔡元定为人，曾谒西山祠，撰祭文以表达自己崇敬之情。

蔡元定对程朱理学思想体系的形成有重要贡献。朱熹疏释《四书》及撰《通鉴纲目》、《近思录》等，多与蔡元定反复修订。《易学启蒙》是蔡元定起稿，后由朱熹改定的。人称蔡元定平生学问，"多寓于文公集中"。蔡元定知识面极广，在儒学、政治策略、天文地理、巫道卜筮、道教、军事、音乐等方面均有著述，著作多达十六种。其中，他的《皇极经世指要》可称为程朱理学中象数学的代表作，他的《律吕新书》和《燕乐原辩》是乐律学名著，受到当时学者推崇。《燕乐原辩》已经失传。本章以《律吕新书》为中心整理、总结蔡元定的律算成就和思想。

二、《律吕新书》内容简介

《律吕新书》[2]二卷，是蔡元定律学方面的代表作。在上卷《律吕本原》中，有"黄钟第一"、"黄钟之实第二"、"黄钟生十一律第三"、"十二律之实第四"、

[1] (元)脱脱等. 宋史[M].北京：中华书局,1977.12875.

[2] 本章引用的《律吕新书》为续修《四库全书》版。此版据中国艺术研究院音乐研究所资料馆藏清乾隆刻本影印。此版的《律吕新书》还有罗登选的笺义，并附有朱熹序和众儒生对《律吕新书》的颂词。

“变律第五”、“律生五声图第六”、“变声第七”、“八十四声图第八”、“六十调第九”、“候气第十”、“审度第十一”、“嘉量第十二”、“谨权衡第十三”诸篇；在下卷《律吕证辨》中，有“造律第一”、“律之长短围径之数之数第二”、“黄钟之实第三”、“三分损益上下相生第四”、“和声第五”、“五声大小之次第六”、“变宫变徵第七”、“六十调第八”、“候气第九”、“度量权衡第十”诸篇。在上卷《律吕本原》中，蔡元定提出了他的十八律；在下卷《律吕证辨》中，他考证、校勘了历代的律学著作。下面我们逐卷逐篇详细介绍《律吕新书》。

在《律吕本原》的第一篇“黄钟第一”中，蔡元定首先确定了黄钟管的形状和大小：“长九寸，空围九分，积八百十一分”，再用阴阳术数解释了为什么黄钟管的形状和大小就是这样：“天地之数，始于一，终于十，其一三五七九为阳，九者阳之成也；其二四六八十为阴。十者阳之成也。黄钟者，阳声之始，阳气之动也，故其数九分寸之数具于声气之元，不可得而见，及断竹为管，吹之而声和，候之而气应，而后数始行焉，均其长得九寸，审其围得九分，积其实是八百十一分。”最后他指出确定各律的基本方法：“长九寸、围九分，积八百十一分是为律本，度量衡权于是而受法，十一律由是而损益焉”。在他看来，黄钟律为本律，其他律是在黄钟律的基础上损益而成。这也是我国传统律学的最基本的思想之一，蔡元定正是在继承这种思想的基础上提出了他的十八律的。

在“黄钟之实第二”中，蔡元定把黄钟律的律数用不同的单位表示出来：“子一黄钟之律，丑三为丝法，寅九为寸数，卯二十七为毫法，辰八十一为分数，巳二百四十三为厘法，午七百二十九为厘数，未二千一百八十七为分法，申六千五百六十一为毫数，酉一万九千六百八十三为寸法，戌五万九千□□四十九为丝数，亥十七万七千一百四十七，黄钟之实。”蔡元定实质上给出了一个首项为 1，项数为 12，公比为 3 的等比数列：1，3，9，27，84，243，729，2187，6561，19683，59049，177147，这个数列的项用十二辰的名称来表示。蔡元定这样处理为用三分损益法确定各律的律数带了方便。蔡元定接着约定了各单位之间的换算关系，“其寸分厘毫丝之法皆用九数，故九丝为毫，九毫为厘，九厘为分，九分为寸。”即 1 寸=9 分，1 分=9 厘，1 厘=9 毫，1 毫=9 丝。当然这种换算关系与通常的 1 寸=10 分，1 分=10 厘，1 厘=10 毫，1 毫=10 丝有很大的区别，为此，蔡元定在本篇的最后说明这样处理的理由：“以十为法者，天地之全数也；以九为法者，

因三分损益而立也。全数者即十而取九；相生者，约十而为九。即十而取九者，体之所以立，约十而为九者，用之所以行。体者，所以定中声，用者，所以生十一律也。”蔡元定认为他把 9 作为长短相邻的两种长度单位的换倍数是为了确定音律的需要。但确定完音律这后，还要换回去以确定各律的实际长度。

在“黄钟生十一律第三”篇中，蔡元定开始了以黄钟律为基础求其他十一律的计算：“子一分，一为九寸；丑三分二，一为之三寸；寅九分八，一为一寸；卯二十七分十六，三为一寸，一为三分；辰八十一分六十四，九为一寸，一为一分；巳二百四十三分一百二十八，二十七为一寸，三为一分，一为三厘；午七百二十九分五百一十二，八十一为一寸，九为一分，一为一厘，未二千一百八十七分一千二十四，二百四十三为一寸，二十七为一分，三为一厘，一为三毫；申六千五百六十一分四千九十六，七百二十九为一寸，八十一为一分，九为一厘，一为一毫；酉一万九千六百八十三分八千一百九十二，二千一百八十七为一寸，二百四十三为一分，二十七为一厘，三为一毫，一为三丝；戌五万九千四十九分三万二千七百六十八，六千五百六十一为一寸，七百二十九为一分，八十一为一厘，九为一毫，一为一丝；亥一十七万七千一百四十七分六万五千五百三十六，一万九千六百八十三为一寸，二千一百八十七为一分，二百四十三为一厘，二十七为一毫，三为一丝，一为三忽。”对上述复杂的一系列数字，蔡元定在本篇最后指出了其意义：“黄钟生十一律，子寅辰午申戌六阳辰皆下生，丑卯巳未酉亥六阴辰皆上生，其上以三历十二有者皆黄钟之全数，其下阴数以倍者三分本律而损其一也，阳数以四者三分本律而增其一也”。实际上，蔡元定在这里明确指出，他所确定十二律的方法就是“三分损益法”。

在上卷第四篇“十二律之实第四”中，蔡元定确定了各律的律数和长短：“子黄钟十七万七千一百四十七，全九寸，半无，丑林钟十一万八千□□九十八，全六寸，半三寸不用；寅太簇十五万七千四百六十四，全八寸，半四寸；卯南宫十万四千九百七十六，全五寸三分，半二寸六分不用；辰姑洗十三万九千九百六十八，全七寸一分，半三寸五分，巳应钟九万三千三百一十二，全四寸六分六厘，半二寸三分三厘不用；午蕤宾十二万四千四百一十六，全六寸二分八厘，半三寸一分四厘；未大吕十六万五千八百八十八，全八寸三分七厘六毫，半四寸一分八厘三毫；申夷则十一万□□五百九十二，全五寸五分五厘一毫，半二寸七分二厘

五毫；酉夹钟十四万七千四百五十六，全七寸四分三厘七毫三丝，半三寸六分六厘三毫六丝；戌无射九万八千三百□□四，全四寸八分八厘四毫八丝，半二寸四分四厘二毫四丝；亥仲吕十三万一千□□七十二，全六寸五分八厘三毫四丝六忽，半三寸二分八厘六毫二丝三忽”。仔细阅读上述文字，不难发现有许多矛盾之处。如“全五寸六分，半二寸六分不用”，“全七寸一分，半三寸五分”。实际上，这正是蔡元定的高明之处！对此，在本节的第三部分将深入讨论。

在上卷第五篇“变律第五”中，蔡元定给出了六大变律的律数与长短：“黄钟十七万四千七百六十二，全八寸七分八厘一毫六丝二忽不用，半四寸三分八厘五毫三丝一忽；林钟十一万六千五百□□八，全五寸八分二厘四毫一丝一忽三初，半二寸八分五厘六毫五丝六初；太簇十五万五千三百四十四，全七寸八分二毫四丝四忽七实不用，半三寸八分四厘五毫六丝六忽八初；南吕十□万三千五百六十三，全五寸二分三厘一毫六丝一初六秒，半二寸五分六厘七丝四忽五初三秒；姑洗十三万八千□□八十四，全七寸一厘二毫二丝二初二秒不用，半三寸四分五厘一毫一丝一初一秒；应钟九万二千□□五十六，全四寸六分七毫四丝三忽一初四秒，半二寸三分三毫六丝六忽六秒强不用。”这六大变律与十二正律一起构成了蔡元定的十八律。对于变律，蔡元定认为：“十二律各自为宫以生五声二变，其黄钟、林钟、太簇、南吕、姑洗、应钟六律则能具足。至蕤宾、大吕、夷则、夹钟、无射、仲吕六律，则取黄钟、太簇、南吕、姑洗、应钟六律之声，少下不和，故有变律”，蔡元定设置变律，其目的是为了旋宫[①]。

在上卷“律生五声图第六”篇中，蔡元定首先给出了五声的律数：“宫声八十一、商声七十二、角声六十四、徵声五十四、羽声四十八”。最后，他用“三分损益法”作为依据对此进行了论证。蔡元定的论证与传统关于五音律数的关系的论述完全一致。

在上卷“变声第七”篇中，蔡元定首先给出了两个变声的律数，“变宫声四十二，变徵声五十六”。与上篇内容一样，蔡元定此篇的内容也是完全出于古法。

在“八十四声图第八”和“六十调图第九”中，蔡元定根据《周礼》、《淮南子》、《礼记》等书的记载，结合自己创造的十八律绘制了两幅声调图：“八十四声图”和“六十调图”。

[①] 见本节第三部分。

在“候气第十”篇中，蔡元定在古人“候气”说的基础上，提出了自己的“候气法”：“候气之法，为室三重，户闭，涂衅必周，密布缇缦。室中以木为案，每律各一。案内卑外高，从其方位，加律其上，以葭灰实其端，覆以缇素，案历而候之，气致则吹灰动素。”蔡元定认为从葭灰和缇素飞动的缓急高低中可以断定国家的安定状况和节气的变动情况。“小动为和气，大动为君弱臣强专政之应，不动为君严猛之应。其升降之数在冬至则黄钟九寸，………小雪则应钟四寸六分六厘。”

在“审度第十一”篇中，蔡完定指出了“度”的含义并提出了“度起于律”的观点：“度者，分寸尺丈引，所以度，长短也，生于黄钟之长”。对于“数”、“律”、“度”三者的先后关系，蔡元定明确指出：“数始于一，终于十者，天地之全数也，律未成之前有是数而未见律成，而后数始得以形焉。度之成，在律之后，度之数在律之前”。

在上卷最后二篇“嘉量第十二”和“谨权衡第十三”中，蔡元定先后指出了“量”和“权衡”的含义，并分别提出了“量生于律”、“权生于律”的观点，这些观点是第十一篇“度起于律”观点的延伸。

以上，我们介绍了《律吕新书》上卷的内容。下面，我们接着介绍《律吕新书》下卷《律吕证辨》的内容。

《律吕证辨》的第一篇为“造律第一”。在此篇中，蔡元定以史为据，论证了“以律起度”的合理性。蔡元定认为：“夫律长，则声浊而气先至，极长则不成声，而气不应；律短，则声清而气后至，极短则不成声，而气不应。此其大凡也。”以此为原理，通过不断调节律管的长短，长者减之，短者增之，最终，“中声可得，浅深以列，则中气可验，苟声和气应，则黄钟之为黄钟者，信矣”。黄钟管的长度作为标准则“十一律与度量权者得矣”。对于“律起于度”的弊端，蔡元定指出：“若柜黍， 则岁有丰凶，地有肥瘠，种有长短，大小圆妥不同，尤不可恃。”蔡元定认为，黍的长短大小不一，把尺、寸、分的长短建立在不确定黍的长短的基础上，是不合理的。

在“律长短围径之数第二”篇中，蔡元定首先校正了司马迁《律书》中关于各律长度的记载，后有校勘记，此外，蔡元定还对历代黄钟管的长度和内径进了详实的考证。

在“黄钟之实第三”篇中，蔡元定就《淮南子》和《前汉志》关于黄钟律数的记载作了评述。他认为:“《淮南子》谓置一而十一三之以为黄钟之大数，……以之生十一律，以之生五声二变。上下乘除，参同契合，无所不通。”对于《淮南子》和太史公的这种举措，蔡元定评价的很高：“自《淮南子》和太史公之后，即无识其意者。”《淮南子》的“置一而十一三之以为黄钟之大数，”即是以3^{11}作为黄钟的律数。

在“三分损益上下相生第四”篇中，蔡元定对历代律学著作如《吕氏春秋》、《淮南子》、《史记·律书》以及《前汉书》、《后汉书》中关于“三分损益法”的记载进行了整理、比较和评述。

在“和声第五”篇中，蔡元定在研究了历代律学家在变律方面的探索之后指出:“世之论律者皆以十二律为循环相生，不知三分损益之数往而不返”。在蔡元定看来，三分损益法无法返宫:“仲吕再生黄钟，止得八寸七分有奇，不成黄钟正声”。蔡元定认为京房虽然也意识到这一点，但是京房的六十律的中“转生四十八律”则是（京房）“不知变律之数止于六者，出于自然，不可复加，虽强加之，而亦无所用也。”蔡元定在本篇中为自己的六变律寻找理论依据。

在“五声大小之次第六”篇中，蔡元定对《国语》、《史记·律书》、《通典》三书中关于五声的次序的记载作了分析和评述。

在“变宫变徵第七”篇中，蔡完定首先把历代著作如《春秋左氏传》、《前汉书》、《淮南子》、《通典注》中关于五声之外的二变声的记载汇集在一起，最后，蔡元定指出了二变声的作用:“至二变声，则宫不成宫，徵不成徵，不比于正音，但可以济五声之所不及而已。然有五音，而无二变，亦不可以成乐矣”。

在“六十调第八”篇中，蔡元定首先把《周礼》、《礼记》和《淮南子》等书中关于起调的记载汇集在一起，并指出起调的作用:“声者，所以起调，毕曲为清声之纲领”。

在“候气第九”篇中，蔡元定在研究《后汉书》、《隋书》之中关于“候气之法”的记载，然后，他指出了“候气”的理论依据:“律者，阳气之动，阳声之始必声和气应，然后可以见天地之心。”

在第二卷最后一篇“度量权衡第十”中，蔡元定对历代的度量衡制度进行了详细的考证。

三、蔡元定的律算成就及其思想

蔡元定的《律吕新书》被收录入朱熹的《性理大全》中。南宋后期，随着理学在我国封建社会的正统地位的正式确立，蔡元定的《律吕新书》对律学的影响也随之日隆。儒门中人极力颂扬蔡元定在律吕方面的成就。朱熹说："季通律书，法度甚精。近世诸儒莫能及"。"季通律书分明是好，即不是臆说，自有按据。"[①]罗登选也这样称赞蔡元定："有宋蔡西山先生《律吕新书》二卷，盖将以探制作之原，该百王之法，使乐经亡而未亡，尝不重赖有是书也"[②]。后世儒生多崇理学，对理学前辈蔡元定的成就自然过于溢美。的确，蔡元定在律算方面取得了一定的成就，并形成了在象数理论指导下的律算思想：

1、蔡元定的十八律在理论上合理地解决了三分损益律的转调问题，从而使三分损益律的理论达到了更加完善的地步。在蔡元定的十八律中，只有 90 音分和 24 音分两种音程。在实际旋宫中，变律不为宫，因此 24 音分的音程可以灵活地调整七声音阶的各个音阶，使全音程都是 204 音分，半音程都是 90 音分。因此，六个变律就可以将十二均的音阶形式统一为黄钟均一种，旋宫就圆满解决了。[③]

2、蔡元定在律的计算技巧方面有很大的改进，把九进制广泛地应用于律的计算之中。戴念祖先生认为："蔡元定实际上完全搬动京房 60 律中的前 18 律，只是不明言，且在计算上耍小聪明以掩人耳目"[④]。这表明：从一方面看，戴先生并不看好蔡元定的律学成就；从另一方面看，戴先生认为蔡元定在律的计算技巧方面有所改进。在《律吕新书》第一卷中许多看似错误的计算，在用九进制计算后都是正确的。

3、在律与度的关系方面，蔡元定的"度起于律"的思想也有一定的合理性。蔡元定通过批判"律起于度"的不合理性来论证"度起于律"的合理性。他认为把黍作为度的基础导致度有很大的不确定性，以不确定的度来确定律是荒谬的。客观地说，蔡元定的"以律起度"也不是完全合理的。通过人耳来确定黄钟音以此来确定黄钟管的长短有很强的主观性。即使这样得到了黄钟管，其长度与其内围之比也不可能恰好是 10:1（9 寸:9 分）。"以度起律"和"以律起度"二者都

① 转引自：罗登选."律吕新书"笺义[M]. 续修《四库全书》版.
② 罗登选."律吕新书"笺义[M]. 续修《四库全书》版.
③ 详见：杨荫浏.中国古代音乐史稿（上册）[M].北京：人民音乐出版社,1981.441—442.
④ 戴念祖.中国声学史[M].石家庄：河北教育出版社,1994.245.

存在着许多困难。按理说，无论是“以度起律”还是“以律起度”，只要度（尺）和律（黄钟）中有一个的长短能精确确定，另一个也可随之精确确定，但在古代的科学技术条件下，这是不可能的。看看现代度量衡制度中米的定义。1963 年 13 届国际计量大会决定：铯原子 Cs133 基态的两个超精细能级间跃迁辐射震荡 9192631770 周所持续的时间为 1 秒。1983 年，国际计量局将米定义为：真空中的光，在 299792.458 分之一秒内通过的行程长度为 1 米。度量衡制度是科学技术水平反映。以现代科技水平看，宋代的度量衡制度是很粗糙的，无论是“以度起律”还是“以律起度”，都是有局限性的。

4、以“口”表示零，也是蔡元定在中国数学史上的一大创举。我国早先用位值法计数，在筹算排列中碰到零则留出空位。用中文数码计数时，最初没有零。如 86021 作“八万六千二十一”。唐代从印度传入《开元占经》引《九执历》中以“每空处恒安一点”来表示零，但对我国数学毫无影响。蔡元定在《律吕新书》首先用“口”表示零，如 59049 用“五万九千口口四十九”表示，118098 用“十一万八千口口九十八”表示等等。这是对计数法的重大贡献。元代刘瑾的音乐著作《律吕成书》也是用“口”表示零。蔡元定去世后不久，秦九韶在《数书九章》（1247 年）、李冶在《测远海镜》（1248 年）中都用“〇”表示零。此后“〇”的应用普及开来了[①]。

此外，《律吕新书》对历代律书进行了详细考证，具有重要的史料价值。尽管蔡元定在律算方面取得了一定的成就，但他的律学成就和方法也有很大的局限性。这主要表现在如下两个方面：

他信奉候气之说。候气之说现在看来是荒诞不经的，是伪科学。在科学的幼年和童年时代，这种现象比比皆是：开普勒信奉占星术，牛顿热衷于炼金术。这时，科学和伪科学是混杂在一起的。对此，我们不能过分苛求蔡元定。

对乐管，蔡元定并没有作管口校正，这使他的律学成就大打折扣。朱载堉对蔡元定的批评是很严厉的：“世间最不知律者，蔡元定其人也，所著《律书》，首条即谬。”接着，朱载堉一一指出其中的错误：“故与余尝辩之曰：黄钟长九寸，则是矣，横黍九十，则非也；空围九分，则是矣，面幂九方分，则非也；纵长八

[①] 严敦杰.中国使用数码字的历史[A].科技史文集（八）[C].上海:上海科学技术出版社,1982.31-50.

十一分，则是矣，积八百一十分，则非也。”[①]此外，从前面我们已经可以看出，戴念祖先生也不太看好蔡元定的律学成就，不仅如此，他还认为，蔡元定在《律吕证辨》的“律长短围径之数第二”篇中对司马迁《律书》的校改是以错改对[②]。

[①]（明） 朱载堉.律吕正论：律管说上第五[M].四库全书存目丛书：经183.

[②] 戴念祖.中国声学史[M].石家庄：河北教育出版社,1994.372-379.

第四章　《盘珠算法》和《数学通轨》

珠算是用珠盘（算盘）计数运算的方法。珠算作为一种独特的计算工具和手段，主要体现在它是用珠盘（算盘）作为器具，用珠算口诀作为运算依据。珠算取代筹算是计算技术的重大变革。中国是珠算的故乡之一，中国的珠算为中国和日本等东方国家的民众广泛使用。日本的珠算，是由中国传入的。现存世上最早的珠算著作之一，是《盘珠算法》和《数学通轨》。这两本书，都出自于福建。除珠算之外，《盘珠算法》和《数学通轨》的其他数学成就和数学思想亦有一定的特色。

第一节　从珠算的起源到现存最早的珠算著作

一、珠算的起源

珠算是由筹算演变而来的。筹算数字中，上面一根筹当 5，下面每一根筹当 1；算盘[1]中上档一珠也当 5，下一档每一珠也是当 1。由此看来，筹算的算法用在珠算上是很容易的。但珠算到底何时产生，数学史家和珠算史家们众说纷纭，各持已见。其中梅文鼎、华印椿、余介石、李培业、李约瑟等人的观点具有一定的代表性。

1、梅文鼎的元末明初说

清代著名数学家梅文鼎（1633—1721 年）在《梅氏历算全书》中的“古算器考”称：

今用珠盘起于何时？曰：古书散亡，苦无明据，若以愚度之，亦起于明初年。何以知之？曰：归除歌括，最为简妙，此珠盘所持以行也。然《九章比类》所载，句长而涩，盖即是时所创。后人踵事增华，乃更简快矣。是书为钱塘吴信民（吴敬）作，其年月可考而知。则盘珠之来，固自不远。

按钦天监历科所传《通轨》，凡乘除皆有定子之法，惟珠算则可用，然则珠算即起其时。又尝见他书，元统造《大统历》，访求得郭伯玉善算，以佐成之，

[1] 指现代算盘，即余介石先生认为应合乎下面两个条件的算盘：一是有轴穿珠，便于操作；二是聚积式的，易于辨识。

即郭太史之裔也。然则珠盘之法，盖即伯玉等所制。亦未可定[1]。

对于梅文鼎的观点，清末福建人潘逢禧已提出质疑：

梅宇九徵君谓："归除歌括始于钱塘吴信民，珠盘所持以行者，疑即是时所创"。然证以杨氏《算定》、朱氏《启蒙》，所载歌括，字句大略相同。杨为宋代德祐人，朱为元大德时人，吴为明时人，则歌括非始于吴矣。……徵君又谓："钦天监所传《通轨》，凡乘除皆有字子之法，惟珠盘则可用。"又谓："明太祖时修改历法，闻郭伯玉精明九数之学，徵令推算。"伯玉为郭太史之裔，珠算或即所制。按此二说，可为用盘之证，而不可为制盘之证。今考珠盘梁上所列二珠，以御商除则有余，以御归除则不足，每遇大数，辄多费手。若珠盘因归除而制，岂有创始之时，即自为窒碍之理。……然则珠盘之起，必在归除之前，至元明而盛行，非明初而始创也。[2]

潘逢禧认为梅文鼎给出的证据只能作为算盘当时已经存在的证据，而不能作为算盘起源时间的证据。潘逢禧怀疑梅文鼎的珠盘始于元末明初说，否定算盘是归除的产物是有一定道理的，但论据不足。所以，后代仍有许多学者（如李俨先生[3]等）沿用梅氏观点。

2、华印椿的宋代说

现代中国珠算大师华印椿认为珠算盘肇始于宋代，并给出详细论证：

（1）巨鹿宋代故城出土了算盘珠。河北省巨鹿县故城于宋徽宗大观二年（1108 年）因黄河泛滥而被湮没。1921 年 7 月，前北平国立历史博物馆曾派员前往巨鹿故城三明寺故地发掘。发掘后获得 200 多件文物，其中有算盘珠一颗，直径 2. 11 厘米，木质，扁圆形，与如今通用的算盘珠大小相仿，只稍扁。现由北京历史博物馆收藏。

（2）宋代刊刻了算书《盘珠集》和《走盘集》。明程大位《算法统宗》卷末"算经源流"条中著录了宋、元、明三代刊印的算书 50 种的目录，其中提到："元丰（1078—1085 年）、绍兴（1131—1162 年）、淳熙（1174—1189 年）以来，刊刻者甚多，且以见闻者著之"，其中 18 种书目中有《盘珠集》和《走盘集》二书。

算盘古称珠盘。珠算法又称盘珠算法。如清代梅文鼎的《古算器考》，梅启照

[1] (清)梅文鼎.古算器考[A].梅氏历算全书·卷二十九[M]. 景印文渊阁四库全书,794：子部，一OO：天文算法类.台湾商务印书馆.

[2] 潘逢禧.算学发蒙·珠算[M].1882.1-3

[3] 李俨.珠算制度考[A]中算史论丛,第四集[C].北京：科学出版社,1955.9-23.

的《珠盘考》，许桂林的《算牖·珠盘考》（1811年），以及《聊斋志异·爱奴》（1573年）和清代陶良骏的《九章盘珠集》，称珠算法为“盘珠算法”，称珠算书为“盘珠集”。由此可见，宋代刊印的《盘珠集》和《走盘集》二书，都是珠算书。

（3）《清明上河图》中的算盘图。故宫博物院收藏的北宋名画家张择端所绘的《清明上河图》为举世闻名之作。其卷末赵太丞家药铺柜上，绘有像算盘的图形。严敦杰于60年代初始发现，曾告知李俨。余介石闻讯后，极感兴趣，特意到故宫博物院调查：右一件白色，似记账水牌；左一件深绿色，像一只15档的算盘，但算珠与横梁若有若无，不能辨别清楚。余介石以为，药价贵贱悬殊，一方药有八九味，多则十几，二十几味，须分别乘出再加，计算较繁，所以药铺需用算盘最迫切。张择端在药铺柜上画了算盘，当是写实。但有人认为，左一件似钱板。然多数人认为，钱板十槽，此图15档，与钱板不同，且旧时商店日间营业收入的货款，都投入钱板，夜间收店后，才启柜取钱点数，放入钱板，穿成钱串。而《清明上河图》描绘的是汴京白天的繁华景象，赵太丞药铺柜上如是钱板，与日间情况不符，因此仍推断为算盘。

1981年1月，中国珠算协会负责人与北京新闻电影制片厂摄影师，又到故宫博物院考察《清明上河图》，将赵太丞药铺柜上的长方形东西，摄影放大。放大后可看出左为算盘，右为水牌，比较清晰。

（4）宋《古今图集成·谢察微算经》中的“用字例义”有如下记载：

中，算盘之中。上，脊梁之上，又位之左。下，脊梁之下，又位之右，脊，盘中横梁隔木。商总，合同商开之法于盘中。

以上“用字例义”，只有珠算盘才适用。

（5）钱易的《南部新书》所述有“鼓珠之法”：钱易在北宋大中祥符中（1008—1016年）做开封县令时，曾撰《南部新书》一书。此书癸卷中记有当时善工算的钟离令王仁岫的“八卦五曹算法”，在叙述此法可计算加、减、乘、除以开方、求一立一诸法时，附带提及“但用诸法径门，取其简要，若尖鼓珠之法，且凝滞于乘除”等语。余介石认为鼓珠是形容算珠如鼓形，当是算盘珠，“鼓珠之法”当是珠算因为珠算便于加、减，乘、除还不够便利，所以有“凝滞乘除”之说。

（6）刘因《静修先生文集》中有《算盘诗》：刘因是宋末元初人，所著《静修先生文集》中有一首“算盘诗”。既然有人以算盘为题作诗，说明宋代民间已

有算盘了。

（7）元初画家王振鹏所绘《乾坤一担图》中有算盘：元初画家王振鹏在元至大三年（1301年）所绘的《乾坤一担图》中，货郎担上有一把算盘，其横梁和档子、穿珠，极为清晰，同现代算盘一样。可以证明宋代已有算盘了。[①]

持这一观点的学者较多。清代的代表人物有梅瑴成（1681—1763年）、凌延堪（1755—1809年）等。

梅瑴成在《增删算法统宗》（1757年）的上法歌、退法歌条中指出："观书目元丰、绍兴间所刻，有《盘珠集》、《走盘集》，其昉（始）于此欤？"

凌延堪在《书程宾渠〈算法统宗〉后》中指出："明程大位《算法统宗》则专言珠算者也。其书卷末算法书目，有《盘珠集》、《走盘集》，云是元丰、绍兴、淳熙以来刻者。然则，今之珠算，盖始于宋。梅氏《古算衍略》谓珠盘之法始于明初郭伯玉者，恐非也。"

显然，梅瑴成、凌延堪二人给出的证据是相同的，属于华先生给出的7条证据之一。

3、余介石和李培业等人的唐代说

算盘创始于唐代的说法，最先由余介石提出。他认为，唐末宋初的陈从运、江本诸人的"一位算法"、"一等算法"，可能是把筹算搬上算盘的尝试。因为"一位算法"须用因折进退，筹算改排不易，很不适宜；珠算拨珠便利，尚不觉难。因此，他认为唐末宋初推行一位算法，是为珠算服务，不是为筹算着想，由此进一步推断算盘起源于唐朝[②]。

此外，殷长生在"考察《清明上河图》鉴定中国的算盘的产生年代"一文中也认为："象《清明上河图》这样如实反映人民生活的图画，这里面所描画出的一种工具，那必须是在这张画作成相当长的年代以前，早就出现了的东西。……如此推论，从唐末到北宋相距年代并不多，……所以可以想像唐朝的晚期或中期已经出了现串档拨珠的算盘了。"[③]

几乎和殷文生同时，李培业发表"唐代创始算盘论"，从三个方面推断已有算盘。

[①] 华印椿.中国珠算史稿[M].北京：中国财政经济出版社,1987.28-37.
[②] 参见《珠算研究》1982（3）
[③] 殷长生.考察《清明上河图》鉴定中国的算盘的产生年代[J].珠算研究.1982(3).

（1）唐中叶以后，各地商业日盛，计算日繁，算筹携带不便，室外计算尤难，为适应商业计算需要，算盘因之产生是很自然的。

（2）从十进小数的发展来看，古代记数，整数以下的奇零部分，通常用分数表示。分数适宜于筹计算，珠算比较困难。而十进小数在算盘上进地运算就很方便。唐代完备了十进小数制度，给珠算创造了有利条件。

（3）从算法的发展来看，唐中法盛行“一位算法”和“求一法”，“求一法”需用倍折之法，不利于筹算。但珠算由于拨珠比置迅速，“求一法”适宜于珠算的运算，所以，从唐中叶开始盛行“一位算法”和“求一法”，这说明唐代已产生算盘。①

4、李约瑟、梅启照等人汉代说

清代梅启照《珠盘考》一文中说：

徐岳《数术记遗》一卷，唐以之课士。……按徐岳东莱人，生汉末，受历学于刘洪，……据此，汉时已有珠盘算法，其从来久矣。但古用上珠、下四珠算，上一当下四，以合八卦之数，本足进退，后世易为上一珠、下五珠，上一当五，乃更便捷耳。②

现代也有人认为，珠算最迟产生于东汉。后汉徐岳所撰、北周甄鸾注解的《数术记遗》，对算盘的雏形已有了详细的描述。如李约瑟先生在《中国科学技术史》中曾指出：“在沂南刚刚发现一个与徐岳同时代的汉墓（193年前后），其浮雕中有一个图样很可能是代表算盘的。”③山东沂南古墓于1953年3至5月发掘。在《沂南古画像石墓发拙报告》一书中，有拓片多幅。其中一幅拓片中，描绘在墓室中有一人跪在地上，双手捧着长方板（又像长盘），向其主子作奉献状态。似向主子报告计算结果。长方板上有六个直行，有三行内有圆珠，每行8颗（上五下三）。另在墓室一侧小几上也有长方板，所绘直行和所置圆珠颗数，与手捧的长板一样。这种长方板可能是一种算器。

持算盘起源于汉代者，《数术记遗》是其重要的依据。但自《四库全书总目提要》提出《数术记遗》系伪托徐岳著作后，迄今否定与肯定两种说法，还莫衷一是。所以，《数术记遗》的成书年代对珠算史研究至关重要。即使《数术记遗》

① 李培业.唐代创始算盘[J].珠算研究.1982(3).
② 梅启照.学强恕斋算学[M].转引自：华印椿.中国珠算史稿[M].北京：中国财政经济出版社,1987. 38.
③ 李约瑟.中国科学技术史,第三卷[M].北京：科学出版社,1978.174

是汉代著作，也不能认为其中提到的“珠算”是在现代算盘上进行的。

不难看出，前文中用于证明珠算起源于某个朝代的材料都是不充分的。比如华印椿先生的宋代说用到的材料主要来自诗词、绘画之类的文艺作品，还有现已失传的《盘珠集》和《走盘集》，以及时间上有争议的《谢察微算经》等。在没有新的过硬史料发现以前，珠算比较确切的起源时间是无法确定的。结合下文，我们谨慎地认为，珠算起源的时间去明初不远。

二、现存最早的珠算著作

明代，珠算逐渐在我国普及。

在明代初期，珠算和筹算并用在社会上流行。洪武四年（1371 年）刊印的《魁本对相四言杂字》儿童读物，既绘算盘，又绘算筹。《魁本对相四言杂字》共收名物三百零八件，每物都有图。所绘的算盘图，是梁上二珠、梁下五珠的十档算盘，形式同现在通用的算盘完全一样。[①]在 1425 年左右出版的《鲁班木经》中记载有算盘的规格：“一尺二寸长，四寸二分大。框六分厚，九分大，起碗底。线上二字，一寸一分；下下五子，三寸一分。长短大小，看子而做。”[②]在经过仔细考证之后，华印椿先生认为，《鲁班木经》记载的算盘就是现代通行的上二珠下五珠，中间由横梁隔开的算盘。[③]

在中期的数学著作中，如吴敬的《九章详注比类算法大全》[④]（以下简称《算法大全》）和王文素的《新集通证古今算学宝鉴》（1524）（以下简称《算学宝鉴》）中加减除有珠算，开平方立方有筹算。明代晚期的读物如《金瓶梅》和《警世通言》等等，则只提珠算，不言筹算了。后期的书如《盘珠算法》（1573）、《数学通轨》（1578）、《算法统宗》（1592）、《算法纂要》（1598）、《算学新说》（1603）等等，已完全采用珠算。这时期的珠算，显然已取代筹算了。

我们刚才已经提到了好几本明代的数学著作，到底哪一本是现存最早的算盘

[①] 华印椿.中国珠算史稿[M].北京：中国财政经济出版社,1987.63.

[②] 鲁班木经，卷之二[M].1425.25.

[③] 华印椿.中国珠算史稿[M].北京：中国财政经济出版社,1987.64-65

[④] 本章引用的下列古算书为《续修四库全书》版：1、(南宋)杨辉.杨辉算法六卷[M].清道光二十二年刻宜稼堂丛书本. 2、(元)安正斋.详明算法二卷[M].自然科学所藏抄本. 3、(元)贾亨.算法全能集二卷[M].南京图书馆藏明初刻本. 4、(元)朱世杰 (清)罗士琳附释.新编算学启蒙三卷总括一卷[M].北京大学图书馆藏清道光十九年刻本. 5、(明)吴敬.九章详注比类算法大全十卷 乘除开方起例一卷[M].上海图书馆藏明景泰元年王均刻弘治元年吴讷补修本. 6、(明)程大位.新编直指算法统宗十七卷首一卷[M].清康熙五十五年刻本. 见：顾廷龙主编. 续修四库全书·子部:天文算法类,第 1040-1046 册[Z]. 上海:上海古籍出版社,1995.

著作呢？

算盘之名见于算书且言及算盘运数的书，最早的当推明代吴敬的《算法大全》。

吴敬，字信民，号主一翁，明代杭州府仁和县人，生卒年月不详。景泰元年（1450）吴敬所著《算法大全》问世。吴敬曾当几次浙江省布政使司的幕府，因长于计算，管理钱穀（钱粮）。《算法大全》十卷分别为：一卷方田，二卷粟米，三卷衰分，四卷少广，五卷商功，六卷均输，七卷盈朒，八卷方程，九卷勾股，十卷开方。全书总共一千四百余问，字数数十万，为一鸿篇巨著。

在这本书中，吴敬不但提到“不用算盘，至无差误”，而且在此书之河图书数歌诀上说到“免用算盘并算子，乘除加减不为难”。然而，吴敬的这部共10卷的算书中，其第一到第九卷是1000多个数学应用问题解法的汇编，其第十卷是专讲“开方”的，关于珠算算盘虽也这么提到，但太简单了。

在王文素的《算学宝鉴》中也提到算盘、算子。王文素字尚彬，原籍山西汾州。成化年间（1465—1487）随父经商到河北省真定的饶阳（饶川），然后定居在那里。王文素从小聪慧好学，尤其擅长算学。及成人，潜心钻研宋代杨辉以后各家算书，30余年如一日，终于在近60岁时完成巨著一《算学宝鉴》。《算学宝鉴》共收集得一千二百六十七问，分为四十二卷，共订成十二本。

第一卷引“纵横图”，第二至第六卷说：因乘通变各法，第七至三十卷说：方田至勾股九章算法，第三十一至四十一卷说：开平立方以及三乘以上乘方，第四十二卷附列诗词[①]。《算学宝鉴》同吴敬的《算法大全》一样，著录了珠算加减法的“作五诀”、“成十诀”、“破五诀”、“破十诀”，但没有明言珠算， 如“众九相乘”条（卷五）说：

众九相乘，用子甚多，算盘子少，则乘不便，既乘已毕，只动一子居下，余仍如故，……[②]

与《算法大全》一样，《算学宝鉴》只是只言片语地提到算盘、算子等，书中没有算盘图，也没有系统地介绍珠算。确定可靠的记叙算盘珠算的书，现存世上最古老的就是《盘珠算法》和《数学通轨》。

[①] 参见：王文素.通证古今算学宝鉴四十二卷，抄本十二册[M].北京图书馆藏.
[②] 王文素.通证古今算学宝鉴·卷五 [M].北京图书馆藏.

第二节 《盘珠算法》

一、《盘珠算法》的出版

《盘珠算法》全名为《新刻订正家传秘诀盘珠算法士民利用》，卷之首有：

闽建 徐氏 心鲁 订正

书林 熊氏 台南 刊行

卷末有：

万历新岁仲夏

月熊台南刊行。

这本成书于1573年的《盘珠算法》，是明代徐心鲁订正、刻书家熊台南刊行的。徐心鲁，籍贯和生卒年月不详。他自称“新刻订正家传秘诀”，这表明新版《盘珠算法》是根据若干年前版本订正的。宋、元、明时期，福建建阳地区的印刷业十分发达，特别是建阳麻沙一带，其所刊印之书籍在国内享有很高的声誉(参见本文第一章)。“闽建”“书林”闻名天下，在明代、清代仍是如此，从嘉靖《建阳县志》、清《续东华录》等书中十分明白地说明了这点。“建阳之书林，即以刊书为业。”福建民间刊刻之书，多有“闽建”、“书林”之称法。而刊行销售书籍的店，称为“印堂”，如“同仁堂”、“万卷堂”、“勤有堂”、“与耕堂”、“三桂堂”等等。熊台南所刊行的《盘珠算法》，是明万历年间福建所刊刻的众多图书中的一种。

《盘珠算法》在我国已失传，但日本内阁文库藏有一部。此书附有54幅算盘图。算盘式样为梁上一珠，梁下五珠。现代中算史家最先见到《盘珠算法》的是李俨先生。李俨先生有日本内阁文库的《盘珠算法》影摄本一册[①]，现藏于中国科学院自然科学史研究所图书馆。《中国科学技术典籍通汇·数学卷》中收录有李俨本《盘珠算法》的影印本[②]，因此，现在比较容易见到《盘珠算法》了。

二 、《盘珠算法》的珠算加减法

加减法是数学运算的基础。珠算加减法也是珠算计算的基础。珠算加减法的运算依据是加减法口诀：“上法诀”和“退法诀”。珠算加减法口诀在《盘珠算法》

① 李俨.中国数学大纲（下册）[M].北京：科学出版社,1958.307.

② 本文引用的《盘珠算法》为此版本。

之前，就已经在吴敬的《算法大全》）中出现。在该书中，加减法口诀被称为："起五诀"、"成十诀"、"破五诀"和"破十诀"。王文素的《算学宝鉴》中录有相同的口诀：

起五诀：一起四作五　二起三作五　三起二作五　四起一作五

成十诀：一起九成十　二起八成十　三起七成十　四起六成十　五起五成十　六起四成十　七起三成十　八起二成十　九起一成十

破五诀：无一去五下还四　无二去五下三

无三去五下还二　无四去五下还一

破十诀：无一破十下还九　无二破十下还八　无三破十下还七

无四破十下还六　无五破十下还五　无六破十下还四

无七破十下还三　无八破十下还二　无九破十下还一

在王文素的《算学宝鉴》问世五十余年后，徐心鲁在他订正的《盘珠算法》中将这四种加减法口诀综合新的"隶首上诀"和"退法要诀"。

隶首上决：一上一，一下五除四，一退九进一十

二上二，二下五除三，二退八进一十

三上三，三下五除二，三退七进一十

四上四，四下五除一，四退六进一十

五上五，五去五进一十

六上六，六上一去五进一十，六退四进一十

七上七，七上二去五进一十，七退三进一十

八上八，八上三去五进一十，八退二进一十

九上九，九上四去五进一十，九退一进一十

退法要诀：

一退一，一退十还九，一上四退五。

二退二，二退十还八，二上三退五

三退三，三退十还七，三上二退五[①]

四退四，四退十还六，四上一退五

五退五，五退十还五

① "三上二退五"原书无，但原书多了"一上四退五"。

六退六，六退十还四

七退七，七退十还三

八退八，八退十还二

九退九，九退十还一

《盘珠算法》对 “隶首上诀”中的四句作了注释：

一下五除四：如本行下五子俱已在位，今又要上一，则下一无一可上，故于上面下一是五，复于下面去四，故得一。

一退九进一十，如本位子满，在位，又要加一，却无一可加，故几退去九子，却于上位还一子，当下位十子，却正一也。

二下五除三，如本位要上二，奈下梁五子俱在位，却无子可上，故于上梁下一是五，复于下面退三子，则止上得二子也。

二退八进一十，本位无二可上，则退去八，上位还一是十。只识得一数也。余仿此，理同前。

《盘珠算法》对 “退法要诀”中的两句作了注释：

一退十还九：如本位无一可退，故于上位退一是十，复于下位还九，数与退得一数也。一上四退五，如梁上有子，梁下无子，故于梁上退一是五，复于下梁补上四子，乐退得。

其余仿此。

在这些注解中，徐心鲁解释了复杂的珠算加减法口诀算理：当直接加减不行时，用加减两三次操作来代替。比如，在算盘上计算 2+4，此时在算盘的“2”下直接拨上四子是不行的，只好把 2+4 用 2+5-1 代替。又比如计算 6-2，算盘用 6+3-5 代替。

《盘珠算法》中收录的上法、退法口诀，比《算法大全》和《算学宝鉴》中的加减法口诀更简练，拨珠顺序也有改进。例如，上法诀“一起四作五“改为”一下五除四”，将拨珠顺序“先去四后下五”，改为“先下五后去四”；又如退法诀“无一去五下还四，”改为“一上四去五”，将拨珠顺序“先去五后还四”改为“先上四后去五”。这些改变，符合人体工学原理，拨珠都比原来合理顺手。

《盘珠算法》的上法、退法口诀，被以后的珠算著作所采用，这说明它经受了珠算实践的考验，自产生到现在，没有变化，成为了一种标准口诀。

《盘珠算法》中对珠算加减法的另一重大贡献是首先提出了珠算加减法基本功的一种练习方法——“九盘清”

所谓“九盘清”加法是指在空盘上把123456789连加九遍得到111111101。在算盘上，每档可以代表0；1，2，……9、10这十个数，因此，“九盘清”加法练习一遍后得到的结果在算盘上可以表示为$\overline{10101010101010101}$。“九盘清”减法是将$\overline{10101010101010101}$在算盘上连减123456789九遍，最空盘（0）。

“九盘清”以后演变成“七盘清”，“七盘清”是指在空盘上拨上123456789，再将123456789连加七遍，得到新数987654312。“九盘清”、“七盘清”和“打百子”（用珠算从1加到100得到5050）是珠算加减法基本功的练习法。《盘珠算法》奠定的我国传统珠算加减法基本功练习的基础。

三、《盘珠算法》的乘法计算

1、《盘珠算法》的珠算口诀

与通常的珠算书不同，《盘珠算法》并不是把乘法口诀放在书的开始部分。乘法口诀在《盘珠算法》卷之一的尾部：

初学累算数法

二二单四　三二如六[①]　四二单八　五二是十　六二十二　七二十四　八二十六　九二十八　十二二十　二三如六　三三单九　四三十二　五三十五　六三十八　七三二十一　八三二十四　九三二十七　十三三十　二四如八　三四十二　四四十六　五四二十　六四二十四　七四二十八　八四三十二　九四三十六　十四四十　二五一十　三五十五　四五二十　五五二十五　六五三十　七五三十五　八五四十　九五四十五　十五五十　二六十二　三六十八　四六二十四　五六三十　六六三十六　七六四十二　八六四十八　九六五十四　十六六十　二七十四　三七二十一　四七二十八　五七三十五　六七四十二　七七四十九　八七五十六　九七六十三　十七七十　二八十六[②]　二八如八　三八二十四　四八三十二　五八四十　六八四十八　七八五十六　八八六十四　八九七十二[③]　十八八十[④]　二九十八　三九二十七　四九三十六　五九四十五　六九

---

① “三二如六”原书为“二三如六”。
② “二八十六”原书为“ 二八如八”。
③ “八九七十二”原书为“九八七十二”。

五十四　七九六十三　八九七十二　九九八十一　十九九十

珠算的乘法口诀与九九数完全一致。在我国，九九数有着悠久的历史，在春秋战国时代，九九数口诀就散见于诸子百家的著作中。在《管子·轻重》中甚至出现了九九的名称："宓戏作九九之数以应天道。"最初的九九表与现代通常的九九表不同。据《敦煌汉简》和《居延汉简》所载，最初的九九表始于"九九八十一"，终于"二二而四"，只有 36 句口诀。[②] "一九得九"，到"一一如一"，是后人扩充进去的。九九数的顺序反转过来，改为"一一如一"开始，到"九九八十一"为止，大约是公元十三、四世纪宋代的变化。[③]

这四十五句乘法口诀也被称为小九九。由于乘法满足交换律，因此小九九在计算乘法时是够用的。南宋的杨辉认为小九九是不够的，他在《乘法通变算宝》卷中的"算无定法详说"条说："因九九错综而有合数阴阳，凡八十一句，今人求简，止念四十五句，余置不用，算家唯恐无数可致，岂得有数不用者乎？"这说明南宋人只念四十五句口诀的小九九，而杨辉主张念八十一句口诀的大九九。在大九九中，乘数取一至九这九数，被乘数也取从一至九这九数，因此，大九九的口诀是八十一句，而在小九九中，每句口诀的第一数字不得大于第二个数字，这样的口诀因此只有四十五句。

在明代的算家中，吴敬用小九九，但在实际计算时用到了大九九，王文素用杨辉已经提出的大九九。华印椿先生认为徐心鲁用的是小九九[④]，这是有问题的，现在我们看看《盘珠算法》的乘法口诀，共有七十二句，显然不是小九九，在徐心鲁的七十二句口诀中，没有大九九中乘数是 1 或被乘数是 1 的 17 句口诀，但不知为何却多了乘数是 10 的 8 句口诀！这 8 句口诀在实际计算中是没有用的。从总体上看，徐心鲁的乘法口诀属于大九九。明代的其他珠算家如何尚迁、程大位，黄龙吟等，以及清代各家的珠算书中，都只记录了小九九，没有记录大九九。在社会上也只流传小九九。但在珠算实践中，虽然小九九也能完成乘法计算，但人们发现大九九比小九九好[⑤]。

2、《盘珠算法》的珠算乘法基本功练习

[①] "十八八十"原书为"十九九十"。

[②] 李俨.中国古代数学史料[M].上海：上海科学图书仪器公司,1954.16-17.

[③] 李俨,杜石然.中国古代数学简史[M].北京：中华书局,1963.19.

[④] 华印椿.中国珠算史稿[M].北京：中国财政经济出版社,1987.147.

[⑤] 华印椿.中国珠算史稿[M].北京：中国财政经济出版社,1987.148.

《盘珠算法》中记录有珠算乘法的练习方法及图式，这也是一个创举。在《盘珠算法》中将 123456789 分别乘以 2，3，4，5，6，7，8，9，乘得的结果再分别除以 2，3，4，5，6，7，8，9 还原成 123456789。在这里乘除法的基本功练习是一起进行的，这样训练，练习者很容易检验出自己的计算是否正确。

3、《盘珠算法》的普通珠算乘法（多位数乘法）

多位数乘法是珠算乘法的中心内容。珠算乘法源于筹算乘法。到了明代，珠算取代了筹算，珠算乘法也有了较大的发展。对《盘珠算法》中的多位数乘法，珠算史家们的研究并不多。在华印椿先生的《中国珠算史稿》和劳汉生的《珠算与实用算术》中均没有这个方面的介绍。李俨先生在《中国数学大纲》中对《盘珠算法》的多位数珠算乘法有过简略的介绍[①]。我们在此全面深入地整理《盘珠算法》中的多位数珠算乘法。

《盘珠算法》在第一卷中有“乘法”的总诀，并附注如下：

“乘法之数此为真（下：下其子也；乘：因而乘之；法：定数之法则也，以此定数之法则而乘之，则得其真矣。）

位数先将第二因（位：千百十令之位；数：千百十令之数；第二因：先以第二位因起也。）

三四五来乘便了（三、四、五：三四五位也，自一、自二、自三、自四、自五而来也；乘遍三四五位，俱乘之尽也。）

却将本位破其身（本位：本身之位；破其身：破论其本身之子，二三四五既乘之尽，然后将身之子而破动也。）

该文应该是对口诀的解释。在第一句口诀。“乘数之法此为真”中，该口诀中没有“下”，但在注中，却有“下”的注文。第三句口诀中的“乘便”在注文中却成了“乘遍”。可见这里有问题！在十三、十四世纪宋元时期的我国的民间数学著作中，就出现过类似的口诀。元代儒生安止斋，何平子著的《详明算法》上卷第三部分“乘法”条中有这样的记载：

乘法

歌曰：下乘之法此为真，位数先将第二因

三四五来乘遍了 却将本位破其身

[①]李俨.中国数学大纲（下册）[M].北京：科学出版社,1958.326.

另外，元代人贾亨的《算法全能集》卷上也有相同的口诀：

乘法（二以上位数多者用此法，从来位小数算起，用归法还原。）

下乘之法此为真　位数先将第二因

三四五来乘遍了　却将本位破其身

与《详明算法》不同，《算法全能集》对口诀的适用范围和使用方法作了简略的说明。在明代的诸算书中，《算法大全》、《算学宝鉴》、《数学通轨》、《算法统宗》也录有与《详明算法》和《算法全能集》完全相同的多位数乘法口诀。可见，《盘珠算法》的多位数乘法口诀应该与《详明算法》和《算法全能集》中的同类口诀相同。

《盘珠算法》的多位数乘法口诀用在珠算的留头乘中。筹算的留头乘首先见于元代著名数学家朱世杰的《算学启蒙》卷上的“留头乘法门”。朱世杰对留头乘写了四句口诀：

“留头乘法别规模，起首先从次位呼；言十靠身如隔位，遍临头位破身铺”。

《详明算法》和《算法全能集》的多位数乘法口诀也是用于筹算中的。明代珠算取代筹算，留头乘适合小九九，而在社会中小九九也更盛行，因此，留头乘的使用也更广泛。

下面，我们看看《盘珠算法》是怎样进行留头乘的。

《盘珠算法》卷之一对这样二题：

如有田九百一十四亩八分九厘，每亩收粮二升九合。问该粮若干？答曰：二十六石五斗三升一合八勺一抄。

又有前田数，每亩收租二百九十斤，问该租若干？答曰：二万六千五百三十一斤

显然，此二例的解法是一样的。《盘珠算法》给出了如下的解法：

九九八十一，二九一十八（八退二进一十）

八九七十二，二八十六（六退四还十）

四九三十六（六上一去五进一十），二四如八[①]（八上三去五进一十）

一九如九（九退一进十，三位上打），一二如二（二位上打子）

九九八十一（一下五除四），二九一十八[①]（八退二进一十）

[①] “二四如八”原书为“一四如八”。

对此解法今解如下：

9	1	4	8	9									2	9

（初盘）

9	1	4	8	2	6	1							2	9

（第一盘）

9	1	4	2	5	8	1							2	9

（第二盘）

9	1	1	4	1	8	1							2	9

（第三盘）

9		4	3	1	8	1							2	9

（第四盘）

2	6	5	3	1	8	1							2	9

（第五盘）

实际上，对于乘数是二位数，留头乘与掉尾乘（见下节）的区别不大。在《盘珠算法》中，还有乘数是三位以上，并附有珠算解法的乘法若干题，下面是其中的一例，此例名为“狮子滚球法”。

狮子滚球法

歌曰：一九五三一二五，五一二因。

今有田一千九百五十三亩一分二厘五毫，每亩科正米五升一合二勺，共米若干？

答曰：该米一百石。

法曰：以田一九五三一二五在位，却以米科五一二在后乘之。一五得五，加二五一十，加五五二十五（破本身）；一二得二，加二二得四，（四退六还一十），二五一十（破身），一一得一，加一二得二（二退八还一十），加一五得五（破身），一三得三[2]，加二三得六（六退四还一十）。三五一十五，破；一五得五（五去五还一十），二五得一十，五五二十五，破；一九得九（九退一还十）二九一十八（八退二还十），五九四十五，破；一一得一，加一二得二（二退八还十），一五

① “二九一十八”原书为“九九八十一”。
② “一三得三”原书为“一五得，二二”。

如五（五去五还十），破[①]。

对上例今解如下：

对上例今解如下：

1	9	5	3	1	2	5						5	1	2

（初盘）

1	9	5	3	1	2	2	5	6				5	1	2

（第一盘）注意计算顺序：10×5=50　2×5=10　5×500=2500

1	9	5	3	1	1	2	8					5	1	2

（第二盘）注意计算顺序：10×20=200　20×2=40　20×500=10000

下面每盘的计算顺序都与第一盘、第二盘相同，不再说明。

1	9	5	3	6	4							5	1	2

（第三盘）

1	9	5	1	6								5	1	2

（第四盘）

1	9	2	7	2								5	1	2

（第五盘）

1	4	8	8									5	1	2

（第六盘）

1												5	1	2

（第七盘）

可以看出，对两个多位数的乘法：$a_1a_2a_3a_4 \times b_1b_2b_3b_4$，留头乘采用了这样的计算顺序：$a_4 \times b_2$，$a_4 \times b_3$，$a_4 \times b_4$，$a_4 \times b_1$；$a_3 \times b_2$，$a_3 \times b_3$，$a_3 \times b_4$，$a_3 \times b_1$；$a_2 \times b_2$，$a_2 \times b_3$，$a_2 \times b_4$，$a_2 \times b_1$；$a_1 \times b_2$，$a_1 \times b_3$，$a_1 \times b_4$，$a_1 \times b_1$。

4、《盘珠算法》的特殊乘法。

《盘珠算法》的其它各类的乘法有二字奇法和辅地锦。

① 二字奇法

二字奇法既可作乘法，也可用作除法。《盘珠算法》的二字奇法的歌诀和释义如下：

[①] “破”字原书无。

二字奇法：

二字赛归除，玄中妙更奇，贤愚从此学，尽在一时知。

止用进退二法，凡用分物，进一隔位而除之，凡用见总，退一隔位而加之。易明之见也。

可见《盘珠算法》非常推崇二字奇法，认为任何人无论聪明还是愚蠢，都可以很容易地学会二字奇法。接着《盘珠算法》举出了二字奇法的若干实例：

[例 1]今有银四两，二人分之，(各若干？)

法曰：进一除二，进一除二。

答曰：各贴银二两，还原退一加二，退一加二。

[例 2]今有银二十二两，十一人分之，

法曰：进一除一一[1]，进一除一一。

答曰：各贴二两。还原退一加一一，退一加一一。

[例 3]今有银四十二两，二十一分之？

答曰：各贴二两。还原退一加二一，退一加二一

以上分账不用归法定，身除，归法用之。

以上三例为除法用“二字奇法”计算，下面三例则为乘法用“二字奇法”计算：

[例 1]今有米二石，每斗要银四分。

法曰：退一加四，退一加四，四下五除。

共该银八钱。还原进一除四，四上一除一五，进一除四。

[例 2]今有米二石，每斗该银五分五厘，

法曰：退一加五五，退一加五五，五除五进一十，五除五进一十。

答曰：共银一两一钱，还原进一除五，五退十还五，五退十还五，进一退五五。

[例 3]今有银二两，每两加一五耗，共银多少？

法曰：退一加一五，退一加一五，五除五进一十。

答曰：该耗三钱，再加正银二两，共耗二两三钱。还原进一除一五，五退十还五；进一除一五。以上见总不用因乘法。

---

[1] “一”原书为“二”。

对二字奇法的算理，可以用今天的数学语言分析如下：

对于乘法 m×n, m, n 为自然数，m×n=m+m+……+m（n 个 m 相加）

对于除法 m÷n，m-n-n……n=r(r<n)，减的次数为商，二字奇法实际上是根据自然数乘除法的定义来进行计算的；乘法用累加，除法用累减。二字奇法是一种原始方法，对于较大的自然数的乘除法计算显然是不实用的。程大位在《算法统宗》卷十七对二字奇法和以二字奇法为基础的金蝉脱壳法作了严厉的批评："金蝉脱壳并此二句字诀（即二字奇法）布算繁叠，只是小智之术，蠢子顽儿之数。"

②铺地锦

"铺地锦"法是用方格中填写两数相乘结果，进而以格子中的数字为基础，求出积的一种特殊的乘法计算方法。"铺地锦"曾在阿拉伯长期使用，传入欧洲后，被欧洲人称为"格子算法"或"格栅算法"。在我国，这种方法的最早记载，出现在吴敬的《算法大全》中，吴敬把这种算法称为"写算"。在我国，算书中"铺地锦"的称法最早可能就是见之于《盘珠算法》。可惜，《盘珠算法》中的"铺地锦"法出现了一定的异化。《盘珠算法》中的"铺地锦"法出现了卷之一，今录如下：

铺地锦，不用算盘因乘见总

今有米二斗三升四合，每斗要银五分五厘，问银多少？

答曰：该银一钱二分八厘七毫。

四合　二厘　二毫；　三升　一分五厘　一[①]厘五毫；　二斗　一钱　一分。

法曰：二五一十，五二一十，三五一十五，三五一十五，四五二十，四五二十

《盘珠算法》在乘法口诀之后，用铺地锦法计算本题时，把钱相应的数字加起来即把分相应的数字加起来，厘相应数字加起来，毫相应的数字加起来，从而得到积数，这与普通的"铺地锦"法算理是一致的，但《盘珠算法》中的"铺地锦"没有了格子，方法上欠一定的普遍性，殊是可惜！

四、《盘珠算法》的除法计算

《盘珠算法》的除法有归法、归除法、金蝉脱壳法和二字奇法四种。这四种须用算盘来进行。归法和归除法的区别是归法的除数是一位数，归除法的除数是

[①] "一"原书为"二"。

多位数，二字奇法前面已经介绍，在此不再详述。下面，我们将详细介绍和评述其它三种除法。

1、归法

在《盘珠算法》的卷之一录有归法的口诀：

归法总诀

一归不须归，其法故不立

二归 二一添作五 逢二进一十 逢四进二[1] 逢六进三十 逢八进四十

三归 三一[2]三十一 三二六十二 逢三进一十 逢六进二十 逢九进三十

四归 四一二十二 四二添作五 四三七十二 逢四进一十 逢八进二十

五归 五一倍作二 二五倍作四 五三倍作六 五四倍作八 逢五[3]进一十

六归 六一下加四 六二三十二 六三添作五 六四六十四 六五八十二 逢六进一十

七归 七一下加三 七二下加六 七三四十二 七四五十五 七五七十一 七六八十四 逢七进一十

八归 八一下加二 八二下加四 八三下加六 八四添作五 八五六十二 八六七十四 八七八十六 逢八进一十

九归 随身下位加一倍 逢九进一十

归法口诀并不是《盘珠算法》的创造，早在筹算为主的时代。我国就出现过类似的九归口诀。在杨辉的著作《杨辉算法·乘除通变本末》的中卷《乘除通变算宝》就有这样的九归口诀。

归数求成十 九归：遇九成十；八归：遇八成十；七归：遇七成十； 六归：遇六成十；五归：遇五成十；四归：遇四成十； 三归：遇三成十；二归：遇二成十

归数自上加：九归：见一下一，见二下二，见三下三，见四下四；八归：见一下二，见二下四；七归：见一下三，见二下六，见三下十二，即九；六归：见一下四，见二下十二，即八；五归：见一作二，见二作四；四归：见一下十二，即六；三归：见一下二十一，即七

[1] “二”原书为“一”。
[2] “一”原书为“十”。
[3] “五”原书为“九”。

半而为五计：九归：见四五作五，八归：见四作五。七归：见三十五作五，六归：见三作五，五归：见二五作五；四归：见二作五。三归：见一五作五；二归：见一作五。

可以看出，《乘除通变算宝》中只录有32句口诀，但在《乘法通变本末》上卷《算法通变本末》的“习算纲目”条中有：“学九归若记四十四句法，非五七日不熟。”可见杨辉的“九归”口诀应为44句。

到了元代，朱世杰等人对旧的“九归”口诀作了改进，在朱世杰《算学启蒙》中记载有这样的“九归”口诀：

一归如一进，见一进成十；

二一添作五，逢二进成十；

三一三十一，三二六十二，逢三进成十；

四一二十二，四二添作五，四三七十二，逢四进成十；

五归添一倍，逢五进成十；

六一下加四，六二三十二，六三添作五，

六四六十四，六五八十二，逢六进成十；

七一下加三，七二下加六，七三四十二，七四五十五，七五七十一，七六八十四，逢七进成十；

八一下加二，八二下加四，八三下加六，八四添作五，八五六十二，八六七十四，八七八十六，逢八进成十。

九归随身下，逢九进成十。

朱世杰使“九归”口诀基本定型，以后算书的“九归”口诀基本与《算学启蒙》的“九归”口诀相同。注意一下《详明算法》的“九归”口诀，《盘珠算法》的“九归”口诀与之完全相同。

在明代，珠算取代筹算，对于归法，珠算与筹算具有完全相同的口诀，这说明，这只是计算工具的改革，但计算原理并没有改变。

《盘珠算法》中归法基本功的练习图式，前面对此已有介绍，在此不再赘述。

2、《盘珠算法》的珠算归除法

通常认为《盘珠算法》是用归除法进行除数是多位数的珠算除法的。但对《盘珠算法》如何归除，一般的珠算史或数学史著作并未介绍和研究。如在《中国珠

算史稿》中，华印椿先生介绍了吴敬的《九章详注比类算法大全》、王文素的《新集通证古今算学宝鉴》，程大位的数学著作，柯尚迁的《数学通轨》等著作中的归除法，对《盘珠算法》的归除法只字未提。实际上《盘珠算法》不仅给出了归除的算法原理（归除法诀），而且还举出实例来表现归除的具体过程。只是由于《盘珠算法》内容杂乱，虽然有归除法的例子，但讲述得不很清楚，因此，《盘珠算法》的归除法容易被人忽视。

归除法诀

惟有归除法便奇　将身归了次除之　有归若是无除数　起一还将原数施

或遇本归归不得　撞归之法莫故迟　若人识得其中意　算学须深尽可知

《盘珠算法》的“归除法诀”在卷之一，在口诀旁附有注解：

归以归法归之，除以因法除之；身，本身之位言先本身之位以归法归之，次子二、三、四、五位以因法除之也。

有归者，本位上有子，有用归法归之，无除者，二、三位上无子，不能用因法除之。

如二归无除，本位上起一子，上位还二子；三归无除，本位上起一子，三位还三子，余仿此，如一归只二子，三归只三子；故归不得也，余仿此。

如二归只一子，本位撞九，次位撞二，撞作九二是也。如三归撞作九三。余仿此。

识：晓也，意：义也。

言人若晓得归法除中间意，须通算学之始。

除了个别字不同，《盘珠算法》的归除口诀在元代、明代的数学著作如《详明算法》、《算法全能集》、《算法大全》、《算学宝鉴》、《数学通轨》、《算法统宗》中都有收录。

《盘珠算法》有数例归除法例题，今录两例如下：

[例 1]如有前银二百六十五两三钱二分买米，每石价钱二钱九分，问该米[①]若干？

[例 2] 今有田共科正米一百石，每亩科正米五升一合二勺，问田若干？[②]

法曰：（无除数，起一还将原[③]数施，起一还五）一一除一，（一退十还九）一二除

---

① “米”原书为“钱”。

② 《盘珠算法》此题有解法，但没有题目。题目为本文作者添加。

③ “原”原书为“无”。

二，（二退十还八）；五四倍作八，逢五进一十，一九除九（九退一还十），二九除十八（八退十还二）；五二倍作四，逢五进一十，一五除五（五退十还五），二五除一十；五一倍[1]作二，逢五进一十，一三除三，二三[2]除六；逢五进一十，一一除一，一二除二（二退十还八）；五一倍作二，一二除二，二二除四（四退十还六）；五[3]二倍作四，逢[4]五进一十，一五除五，二五除[5]一十。

对例 2 今解如下：

	1											5	1	2

（初盘）

	1	8	8									5	1	2

（一盘）（无除数，起一还将原数施，起一还五）一一除一（一退十还九），一二除二（二退十还八）。

	1	9	2	7	2							5	1	2

（二盘）五四倍作八，逢五进一十，一九除九（九退一还十），二九除十八（八退十还二）。

	1	9	5	1	6							5	1	2

（三盘）五二倍作四，逢五进一十，一五除五（五退十还五），二五除一十。

	1	9	5	3	6	4						5	1	2

（四盘）五一倍作二，逢五进一十，一三除三，二三除六。

	1	9	5	3	1	1	2	8				5	1	2

（五盘）逢五进一十，一一除一，一二除二（二退十还八）。

	1	9	5	3	1	2	2	5	6			5	1	2

（六盘）五一倍作二，一二除二，二二除四（四退十还六）。

	1	9	5	3	1	2	5					5	1	2

（七盘）五二倍作四，逢五进一十，一五除五，二五除一十。

3、《盘珠算法》的金蝉脱壳法。

《盘珠算法》的金蝉脱壳除法的计算方法在“金蝉脱壳诀法”中指出了。《盘珠算法》的“金蝉脱壳诀法”始于徐心鲁的儿子徐清对归除法的一段批评：

---

[1] “倍”原书为“位”。
[2] “三”原书为“二”。
[3] “五”原书为“位”。
[4] “逢”原书为“退”。
[5] “除”原书无。

金蝉脱壳诀法

蠢子清曰：耽闲工夫，不能归除．分物易明，不拘多少分．物在位人数在，只管一进一除，此一位进，除殆尽，又从次位进，除之；次位进，除又尽，又下次位进除之。直除到末位俱尽方终．是数科量呼喝数目是也。二人分物进一除二，三人分进一除三，十一人进一除十一[1]，十二人进一除一二，至几千几百已十人分：曰除几千几百几十人进除尽矣。略说譬如后学者．

徐心鲁虽表面称徐清为“蠢子”，但对徐清提出的分物方法还是赞誉有加。可以看出，“金蝉脱壳法”是以“二字奇法”为基础的。请看《盘珠算法》的有关例题和解法。

今有银一万二千三百四十五万六千七百八十九两，问该多少斤数?

法曰：一斤十六两，以数在位，进一除一除六是也，(起一作十，初位去一，二位加十)。进一（初位上进）除一（第二位除）除六（六退十还四，四下五除一)，进一除一六，进一除一除六（六退十还四)，进一除一除六，六退十还四，四下五除一，进一除一（一上四去五）除六，进一除一除六（六退十还四，四下五除一）进一除一除六。初位进完惟存七数

第二位（起一作十，第二位起一子，加十子下三位）进一除一除六（一上四去五，六退十还四，四下五除一)，进一除一六，进一除一六，一下四去五，五（六）退十还四，进一（一下五除四）除一六（六退十退四，四下五除一)，进一除一六，第二位完，进存之数（七）

第三位进一除一六（六退十还四)，完存一数．

第四位进一除一六，进一除一六（六退十还四）进一除一六（六退十还四，四下五除一，进一除一六，第四位进完，存六数．)

第五位空

第六位进一除一六，进一除一六（一上四除五，六退十还四）进一除一六，进一除一六（六退十还四五除一四）第六位进完存四数

（起一作十，七位化作十子八位)，进一除一六（六退十还四，四下五除一)．进一除一六（六退十还四，四下五除一，）进一（一下五除四）除一六，进一除一六（退十还四)．第七位进完存数

[1]“十一”原书为“一”。

第八位进一除一六（六退十还四）、进一除一六（六退十还四，四下五除一），，进一除一六[①]。

答曰：共进收得七千七百一十六万四百九十三斤二两

《盘珠算法》的“金蝉脱壳诀法”对“二字奇法”作了一些改进：“金蝉脱壳诀法”从被除数的高位开始不断地减除数的某个10^n倍，加商10^n一次，就减一次，直至减到减不开为止。即便如此，“金蝉脱壳诀法”计算步骤还是繁多。程大位对其批评是有道理的。

五、《盘珠算法》的体积计算

体积计算是我国传统数学的重要内容之一，我国传统数学名著《九章算术》商功章就有多种几何体的体积计算。《盘珠算法》的体积计算涉及的立体的种类比《九章算术》少得多。在卷之一，《盘珠算法》以歌诀的形式给出了几种常见的几何的体积公式：

指明歌诀

方仓长与阔相乘　堆与员仓周自行　各再以高乘见积　员用三归方四因

尖堆只用九归是　五九归之倚壁明　内角九归四因是　外角三九归四因

若还方窟兼员窖　上下周方各自乘　乘了另将上乘下　并三为一再乘深

方窖三归四因是　六六四因员窟成　此法前贤传后代　一升一合不差陈

在歌诀之后，《盘珠算法》补充了体积与容积的换算关系（即斛法）：以积立方二尺五寸为一石

《盘珠算法》认为此法是“前贤传后代”。此言不虚。在宋元时期的算书中，就出现了类似的歌诀。如早在元代《详明算法》中就记载有如下的“盘量仓窖歌”

盘量仓窖歌曰：

方仓长与阔相乘　堆与圆仓周自行　各再以高乘见积　唯圆十二一中分

尖堆法用三十六　倚壁须分十八停　内角聚时如九一　外角三九积分明

若还方窖兼员窖　上下周方各自乘　乘了另将上乘下　并三为一再乘深

如三而一为方积　三十六分圆积成　斛法却将除见数　一升一合不差争

以上歌诀，《算法全能集》、《算法大全》等也有基本相同的记载。

---

① 《盘珠算法》对此题给出的解法漏掉了许多口诀。

在歌诀之后，为了加深对歌诀的理解，《盘珠算法》用实例来表现立体的体积的具体求法。

1、圆仓（圆柱体），《盘珠算法》有如下的例子：

今有圆仓一所，周围二丈四尺，高深一丈二尺三寸。问积米若干？

答曰：积米二百三十三石一斗六升。

[法曰]：以周二丈四尺自乘得五七六，却又与深高一丈二尺二寸相乘得七〇八四八，用三归一遍合问。

在这里，《盘珠算法》相当于运用公式$V=\frac{l^2h}{3}$求圆仓的体积（其中l为圆仓底面周长，h 为仓高）。看起来《盘珠算法》的圆仓公式与《九章算术》的圆仓的体积公式$V=\frac{l^2h}{12}$有很大的不同。但实质上是一样的，《盘珠算法》中的长度单位为丈、尺、寸而体积单位为石、斗、升，并不是立方丈、立方尺、立方寸。在计算时，《盘珠算法》实际上运用换算关系（解法）：1 立方尺=4 斗。这种换算关系与《盘珠算法》给出的换算关系--以积立方二尺五寸为一石--是等价的。对求其它形体的体积，《盘珠算法》也都运用了这种换算关系，这使《盘珠算法》的“指明歌诀”与《详明算法》等的“盘量仓窖歌”初看起来区别很大。

2、尖堆（圆锥），《盘珠算法》给出的体积公式是$V=\frac{1}{9}l^2h$（其中l为底面周长，h 为高）。另外，《盘珠算法》给出了一例尖堆体积的求法问题，但字迹非常模糊，在此不录。显然，这里的$V=\frac{1}{9}l^2h$相当于$V=\frac{1}{36}l^2h$. 考虑到取 π=3，《盘珠算法》给出的圆锥体积公式是正确的。

3、方仓（长方体），《盘珠算法》关于方仓的例子是这样的：

今有方仓一所，长四丈七尺，阔三丈一尺，深九尺，问积米若干？

答曰：积米五千一百四十五石二斗。

法曰：以长四丈七尺与阔三丈一尺相乘得一四五七数. 在位，却以深高九尺乘之得一三一一三，在位，四因一遍合问。

《盘珠算法》给出的长方形体积公是 V=4abc（其中 a 为长，b 为阔，c 为深），相当于 V=abc，是正确的。

4、外角。《九章算术》没有外角的体积计算。《盘珠算法》中的外角例题是：

今有外角聚米一所，周五丈七尺，深八十五寸，问积米若干？

答曰：积米四百八石五斗三合六勺。

法曰：以周五七自乘得三二四九[1]，与深八五相乘得二七五七七四。复用三归、九归、四因各一遍合问。

外角是粮食倚二垂直墙的外角堆放后所形所的形状，形3/4多圆锥，《盘珠算法》给出的外角体积计算公式是$V=\frac{4}{27}l^2h$（l为外角底面周长，h为高），相于$V=\frac{1}{27}l^2h$。当π=3时，此公式是正确的。

5、方窟（方台），《盘珠算法》的方窟例题是：

今有方窟一所……，上方一丈二尺，下方八尺五寸，深五尺，问积米若干？

答曰：积米二百一十二石一斗六升七合

法曰：先以上方丈二自乘得一十四丈四尺，另又以下方八尺五寸自乘得七丈二尺半，又另以上方一丈二尺与下方八尺五寸相乘得一十丈〇三尺，并作一位共得三十一丈八尺二寸五分，又以深五尺乘之得一五九一五。在位，复用三归四因一遍合问。

《盘珠算法》给出的方台的公式是$V=\frac{4(a^2+b^2+ab)h}{3}$（其中a为上底边长，b为下底边长，h为台高），相当于$V=\frac{(a^2+b^2+ab)h}{3}$，是正确的。但《盘珠算法》关于本题的计算很不严谨，如一丈二尺自乘应为一丈四十四尺，并不是一十四丈四尺，八尺五寸自乘应为七十二尺二十五寸，并不是七丈二尺半等等[2]。

6、倚壁，《盘珠算法》中关于倚壁的例题是：

今有倚壁聚米一堆，脚下周长一丈九尺，高一丈二尺六寸。问积米若干？

答曰：积米一百一石八升

法曰：以周一丈九尺自乘得三六一数，却又与高一丈二尺六寸乘得五四四八六，复用五归九归各一遍合问。

《盘珠算法》给出倚壁的体积公式是$V=\frac{l^2h}{45}$（其中l为底面周长，h为高），

[1] "三二四九"原书为"三十二丈四尺九寸"。

[2] 《盘珠算法》像这样不严谨的地方很多，以后不一一指出。

相当于$V=\frac{l^2h}{180}$，这与倚壁为半圆锥体，体积公式为$V=\frac{l^2h}{18}$（取π=3）整整相差10倍，但《盘珠算法》给出本题的结果却是正确的，这正是《盘珠算法》的不严谨在这里的又一次表现。在这里，《盘珠算法》用五归代替二因。

7、内角，《盘珠算法》的有关例题是：

今有内角，积米食一仓。周一丈五尺，高一丈四尺四寸。问积米若干？

答曰：积米一百四十四石。

法曰：以周一丈五尺自乘得二二五数，又与高一丈四尺四寸乘之得三二四。复用九归一遍，又四因一遍是也。

内角是粮食二垂直墙的内角堆放后所形成的形状，形为$\frac{1}{4}$圆锥。《盘珠算法》给出的内角体积公式是$V=\frac{4}{9}l^2h$（l为底周，h为高），相当于$V=\frac{1}{9}l^2h$，与《九章算术》的内角体积公式完全相同，是正确的。

8、员窖（圆台），《盘珠算法》的有关例题是：

今有员窖一所……上围二丈八尺，下围一丈五尺，深七尺五寸，问积米若干？

答曰：计积稻米一百一十九石八升四合。

法曰：以上围二丈八尺自乘得七十八丈四尺，另又以下围一丈五尺自乘得二十二丈五尺，以上二八与下一五相乘得四十二丈。却以三处并共得一百四十二丈九尺，又与深七尺十寸相乘得一〇七一七，五数在位，却用六归二次四因一次合问。

《盘珠算法》给出圆台公式是$V=\frac{4}{6\times6}(l_1^2+l_2^2+l_1l_2)$（其中$l_1$为上底周长；$l_2$为下底周长；h为高），相当于$V=\frac{1}{36}(l_1^2+l_2^2+l_1l_2)$是正确的。另外也可以看出，《盘珠算法》对此例题的解题过程是不严谨的。

除了上述8种几何体的体积求法之外，《盘珠算法》在卷之二有两例船仓的容积计算问题，在这两题前有解法歌诀，

算船法式

诗曰：船仓腰广先加倍 面底并未[1]为一位 四归却乘见数深 长又乘之斛法退 若还首尾不般者 两位相并又何异 并来折半以深乘 再把长乘为积是 却又四因见米

[1] “未”似乎应为“来”。

数　算者留心莫猜疑

可以看出，《盘珠算法》里的船仓有两种形状：一种是底面为两个等高的共底梯形组成的六边形的直棱柱；另一种是底面为梯形的直棱柱。《盘珠算法》给出第一种船仓的容积公式是$V=\frac{1}{4r}(a_1+2b+a_2)hl$（其中 a_1为面广，a_2为底广，b 为腰长，h 为仓深，l为仓长，r 为斛法。在《盘珠算法》中 r=0.25 尺^3/斗)；《盘珠算法》给出的另一种船仓的容积公式是$V=\frac{4}{2}(a_1+a_2)hl$（其中 a_1为面广；a_2为底广；h 为仓深；l为仓长）。

以歌诀给出的算法为基础，《盘珠算法》虽然不严谨，但正确地解决了两例船仓的容积计算问题。现把两题的题目和解法录如下：

[例 1]今有船一支，两头面广六尺五寸，中腰广七尺五寸，底广六尺，长一丈八尺，问载米若干：

答曰：载米一百二十三石七斗五升。

法曰：以中腰广七尺五寸并作一丈五尺，却以面底三广并作一位共得二丈七尺五寸，四归之得六尺八寸七分半。在位又与一丈八尺乘得一丈二尺三寸七分半，又与深二尺五寸乘得三十丈九尺三寸七分，复以四因乘之合问。

[例 2]今有船一支，面广八尺，底广六尺五寸，长二寸九尺，深二尺。问装载若干？

答曰：装米一百六十八石二斗。

法曰：以面广底广并得一丈四尺五寸，折半作七尺二寸半，却与长二丈九尺相乘得二十一丈零二寸五，又与深二尺乘得之四十二丈零五寸，却用斛法因乘之合问。

六、《盘珠算法》的面积计算

《九章算术》的方田章探讨了若干种图形的面积计算。在《盘珠算法》的卷之二也有大量的平面图形面积计算，涉及的图形远比《九章算术》方田章丰富多样。面积计算是《盘珠算法》卷之二的主要内容。《盘珠算法》的面积计算也以歌诀先行。卷之二以如下的“算丈量田法”开始：

算丈量田法

古者量田较阔阔长　全凭绳尺经牵量　二形虽有一般体　惟有方田法易洋。

若见喎斜并四[①]曲 直虽[②]裨补取其方 却将乘实为亩积，二四除之亩法强。

此歌诀在《盘珠算法》之前的数学著作《算法全能集》、《详明算法》和《算法大全》都有记载。这三书的丈量田亩歌诀与《盘珠算法》的“算丈量田法”只有个别字不同。在“算丈量田法”中，《盘珠算法》指出了丈量土地的一般方法：“若见呙斜并凹曲，直须裨补取其方”。也就是截盈补虚法，对此《盘珠算法》在卷之二的丈量土地的“又诀法”中作了进一步说明：

……凡丈量，先观其形势，截盈补虚。神为直方，固旋转折要合曲尺规矩。

截盈补虚法与古代刘徽提出的出入相补法是一样的。在提出丈量土地的一般原则之后，《盘珠算法》对各种平面图形的面积计算方法在如下的“田形歌诀”中指出了。

田形歌诀

只因乘之法亩明 直长与阔两相乘 圭梭一折乘为积 勾股半梭依阔乘 勾股勾难通方折 量弦往作半梭形 弧矢弦步加入阔 折半再以阔相乘 梯斜田形两头并南北东西并折乘 圆周自乘十二约 径自乘米七五乘 行周半乘乘为的 周径相乘四一停 丈量惟有十六句 更移法例通诸形 抹角通乘方正积 再乘抹角折除平 缺如方角乘无折 幞头曲尺两田营 火塘钱形乘通积 再乘里步减余盈 环辋磬朋周湾折径相乘之积数成 鼓领一头入中间 折半乘中步数明 三广倍中加二阔 四而为一又长乘 娥眉牛角无真数 更为弧矢勾梭乘 以上诸形为法例 要从规矩折纵横 倍加零尺为分数 丈尺并之步数成 细详丈尺乘为步 圭梭弧步亦问明 势多槁斜四不等予裁捷法更调停 四圆绳植磋壁界 科量中径如梭评 径如一隅难方折 是为一方两片边 方昌内外夹圆角 半梭弧矢截量成 一画五问三尺古 业擅专门的数明

在“田形歌诀”中前十句给出了长方形、等腰三角形、直角三角形、梯形、弓形、圆等几种基本平面图形的面积计算，是一般图形面积计算的基础。“田形歌诀”的后三十句指出了若干复杂图形的丈量方法和面积的计算技巧。

在“算丈量田法”、“田形歌诀”和“又诀法”三大口诀后，《盘珠算法》指出了方圆规矩中的若干关系：“径一围三、方五围七”和等边三角形的“三角七中径六”。对“径一围三”，《盘珠算法》认为是近似的：“员以三一五为法。（径求周乘之，周求径除之）”。《盘珠算法》给出的 $\pi=3.15$，是比较精确的。

[①] 此处的“四”在《算法统宗》、《详明算法》、《算法全能集》等书的丈量田亩歌诀中都为“凹”。
[②] 此处的“虽”在《算法统宗》、《详明算法》、《算法全能集》等书的丈量田亩歌诀中都为“须”。

在作完这些准备之后，《盘珠算法》举出了大量的面积计算实例。现录若干如下：

1、假如弧矢，弦长三十六步，一阔十二步．问若干？

答曰：积二百八十八步．

法曰：长三十六并阔十二步共四十八，折半得二十四，乘阔十二步见积．

弧矢即弓形。《盘珠算法》给出的弓形面积公式是$S=\frac{(l+h)h}{2}$（l为弦长，h为弓高），《九章算术》方田章第36题给出的公式是$S=\frac{1}{2}(lh+h^2)$。显然，两公式是实质上相同的。今天看来，《九章算术》、《盘珠算法》给出的弓形的面积公式是粗略的。

2、假如员形周六十步，径二十步．问若干？

答曰：积三百步．外周折半作三十步，（曰）径折半作十步，乘三十步见积三百步也，或六十乘径二十得一千二百，以四归之亦是．若较其的，则径一围三一五为当．此径二十七步也，则周有六十三．是员形必须量用径，或相乘皆数也．但径一为三是其略也．

《盘珠算法》在“田形歌诀”中给出了圆面积的四个计算公式：①$S=\frac{1}{12}l^2$ ②$S=\frac{75}{100}d^2$③$S=\frac{l}{2}\cdot\frac{d}{2}$ ④$S=\frac{ld}{4}$（公式四个）其中l为圆周长，d为直径。当取π=3时，上面四个公式都是正确的。在此例中，《盘珠算法》仅用③、④两个公式计算圆面积，并指出由于π=3，因此，这两种计算是粗略的。

3、如抹角田，东三十步，四二十四步，南二十步，北二十八步，问若干？

答曰：八百一十六步．

法曰：东三十步乘北一十八步见各共八百四十步．以东三十步减西二十四步，余六步；北二十八步减南二十步，余八步，乘六得四十八步，折半见抹角二十四步．就共积内减之，余见实积八百十六步也．

《盘珠算法》中的抹角是长方形去掉一个角后得到的五边形。《盘珠算法》的抹角面积的计算公式是$S=ab-\frac{1}{2}(a-c)(b-d)$，其中a为原长方形的长，b为原方形的宽，c为去掉一角后长剩下的长度，d为去掉一角后一宽剩下的长度。

可以看出，《盘珠算法》对抹角的面积计算是正确的。

4、假如环形外周七十二步，内角三十六步，径六步，问若干？

答曰：三百二四步。

法曰：外周并内周共一百八步。折半为五十四步，乘径六步见积三百二十四步也。

《盘珠算法》的环形面积公式是$S=\frac{1}{2}(l_1+l_2)\cdot d$，其中$l_1$为内周长；$l_2$为外周长；d为环径。与《九章算术》卷第一方田章第38题的一环形面积公式相同。对于环形，环径$d=\frac{l_2-l_1}{2\pi}=\frac{l_2-l_1}{6}$（π=3），因此，仅仅已知内周与外周，我们就可以求出环形面积$S=\frac{1}{12}(l_1+l_2)(l_2-l_1)$，在《九章算术》方田章第38题的环形题中，$d\neq\frac{l_2-l_1}{6}$，题目出得不合手逻辑。在这一点，《盘珠算法》比《九章算术》做得好。

除了以上四例，还有另外八例（书中提到应有二十例，但实际只有十二例）。《盘珠算法》把这十二前例作为平面图形面积计算的典范，要求算者要留心掌握。对这十二前例的重要性，《盘珠算法》写道：

前列二十问，体源流之格范，依形量势而已矣。后例十二问，竭愚衷之管见，剖决异同，裁量中径、合方、折角，丈量步度，求其数的无偏而已矣。算者留心于前，以明其形势之规模，用意于后，以究其积数之准的，是益治其精，升堂而入于室也。乐道君子宜细详而择思之可也。

在十二前例之后，《盘珠算法》有十二后例复杂图形的面积计算，现录若干如下：

1、假如三广形，东三十步也，西三十四步，中二十步，长六十步，长六十步。问若干？

答曰：一千二百六十步。

法曰：中阔二加倍为四十，并东西阔共一百四步，以四归得均阔二十六步，乘长六十步，只得积步也。凡三广，中间必须居中，方为的数。如中阔偏居阔头，

则狭头长而数有余；偏居狭[①]头则狭而数不足，是我截为两端而量之为的也。

三广形为共底的两梯形拼成，《盘珠算法》的三广形面积公式是 $S=\frac{1}{4}(a_1+a_2+2b)h$，其中 a_1 为上广，a_2 为下广，b 为中广，h 为高。对此公式，《盘珠算法》认为只有中广处于上广和下广的正中间才是正确的，当中广偏于长广时，此公式偏大，当中广偏于短广时，此公式偏小。《盘珠算法》的这些观点是正确的。

2、假如眉形，上湾三十二步，下湾二十五步，径六陟。今作弧矢量，直弦二十三步，上六步下虚径四步，问若干？

答曰：一百一十一步。

法曰：弦二十三并通径十步共三十三步，折半为十六步半，乘径十步见共一百六十五步。又下径四步并弦二十三共折半为十三步半，乘径四步，见虚五十四步，共内减之余之鼎积一百一十一步也。

（或）……并上湾下下湾折半为二十八步半，乘半径三步，仅有八十五步半。

《盘珠算法》给出了眉形面积的两种计算公式：

（1）$S=\frac{1}{2}(d+H)H-\frac{1}{2}(d+h)h$，其中 H 为大弓形高，h 为小弓形高，d 为弦长。（2）$S=\frac{(L+l)}{2}\cdot\frac{(H-h)}{2}$，其中 L 为大弓形的弧长；$l$ 为小弓形的弧长。

《盘珠算法》发现公式（2）比公式（1）小。实际上，这两个公式都是近似公式。《盘珠算法》认为牛角形，也可用公式（2）计算。

3、假如四不等田，南十六步三尺，北十五步三尺，东作正十五步四尺，西（“西”原书为“面”）作正十四步一尺，问若干？

答曰：二百四十步。

《盘珠算法》此例的四不等田为不等腰梯形。《盘珠算法》给出的面积公式为 $S=\frac{a+b}{2}\frac{c+d}{2}$（其中 a, b 为两底，c, d 为两腰）。显然，此公式也是近似的，《盘珠算法》也是这样认为的：“四不等，差待不远，则合曲尺折方作半量数如歌。”《盘珠算法》认为如果四不等田像本例这样，四边相差不远，就可以用本例的面积公式近似计算。这种看法是正确的。

[①] “狭”原书为“阔”。

4、假如斜形四不等田，绳直四围，斜量中径如梭形，算东南至西北四十步，西南十八步，东北十二步，问若干？

答曰：六百步。

法曰：中径四十步折半为二十步，以东北十二步并西南十八共三十步，乘见六百也。

《盘珠算法》把斜形四不等田分解为两个共底的等腰三角形，然后再求其面积。

在大量的例子之后，《盘珠算法》总结了丈量土地和平面图形的面积计算的要领：

右例三十二图[①]明其形势之规模而已，至于经量在人之取舍而变通也。如若拘量形势而依样画葫芦也，难以斟其端的数也。经画高明君子，观其方直圭梭，勾弧形势，折合方正，以量之可也。余别异样，不必拘量形势，要须合方折角。截段分形立向极足以四方，量中经以及四隅，求合圭梭勾弧之势，而酌量之则数端的而无偏误，凡执其中致中和之道欤。

在丈量土地和面积计算之后，《盘珠算法》也有少量与《九章算术》少广章相同的内容，即已知平面图形的面积，反求其边长、周长等。在《盘珠算法》对这类问题的解法在如下的“假分田地歌”作了生动的表述：

截数为实诀长良，边弦为法见开彰。若如一方如尖角，步法除为丈数量。

二尺法除然步数，如斯筹运异寻常。余形要通开方[②]法，少广章中仔细详。

《盘珠算法》认为对于长方形、三角形等已知面积和其它已知条件可以求出另一边长或高等，但对于其它图形，《盘珠算法》要求算者会开方，必须弄通《九章算术》的少广章。《盘珠算法》中的分田地例题也只是涉及到长方形和三角形，都不需要开方，非常简单，现举一例如下：

假如张李共业地东西各三十步，南北各五十步。张业六百六十步，李业八百四十步，作东西算分，问各若干？

答曰：张该阔十丈，李该阔十四。

法曰：各业步数为实，东西三十步为法，法除实见各该截分。阔步数折半见丈数也。若作南北段分即以五十步为法除之也。

---

① “图”原书为“圖”。
② “方”原书为“力”。

七、《盘珠算法》的其它内容

《盘珠算法》除了珠算、体积计算、面积计算之外，还有下面几个方面的内容：

1、田中算稻法。

《盘珠算法》有如下的“田中算稻歌诀”估算稻田的粮食产量：

田中算稻歌诀

田中估稻法真奇 一步方教刘来追 科明多少求斤两 二百四十步田之 仍以稻两相乘法 二八归之稻数随 还有截法深容易 归乘不必用心机 每两每亩十五斤 千金莫度富人知

《盘珠算法》在田中算稻歌诀给出了水稻产量的两个计算公式：$W=\frac{240}{16}ms$ 或W=15ms（其中W为水稻产量的斤数，m为每步的产量两数，s为稻田面积的亩数），后一公式可以从前一公式约分后得到，但《盘珠算法》并没有指出。随后《盘珠算法》给出了三道计算水稻产量的实例：

[例1]今有田三亩二分，假如方取一步打稻三斤，问若干？

答曰：共该稻十五石三十六斤

法曰：先将田三亩二分在位，以每亩二百四十步乘之得七百六十八步在位，却以稻二斤加六化作三十二两，与田步相乘得稻二万四千五百七十六两。每亩十五数不必乘算，但将二斤化作三十二两，每一两每田一亩，却以田三亩二分因四八乘之是也。

在此例中，《盘珠算法》先把水稻的每步产量的斤数化成两数，再计算出水稻总产量的两数，然后又回化成斤数。可见，《盘珠算法》的计算非常呆板。

[例2]今有田七亩五分三厘，方取一步打稻二斤二两，该稻若干？

答曰：该稻三千八百四十三斤

法曰：先以稻二斤二两化作三十四两，每两管稻十五斤，共得五百一十斤为法，却以田七亩五分三厘（乘之）合问。

《盘珠算法》此例用后一公式W=15ms计算。

[例3]假如田七亩五分三厘，方取一步得稻米二升二合，问该若干？

答曰：该稻三十九石七斗五升八合四勺

法曰：不用秤者，但以田七亩五分三厘以二百四十乘之得一千八百零七步在位，却以二升二合乘之合问。

《盘珠算法》此例是计算水稻产量的体积，用的公式是 V=240vs(其中 V 为水稻产量体积总数，v 为每方步稻产量的体积数，s 为稻田面积的亩数)

2、等差级数求和。《盘珠算法》有三类等差级数求和：

①$\sum_{i=i}^{n} i$。在“算垛物诀法”中，《盘珠算法》给出了$\sum_{i=i}^{n} i$的计算公式：

$\sum_{i=i}^{n} i=\frac{1}{2}n(n+1)$。

算垛物诀法

堆物层层直至尖 却将实下数其原 一头添一相乘过 五因折半数无偏

在歌诀之后，《盘珠算法》给出了若干例题：

[例 1]今有稻包一堆，脚下二十四个，每层少一个，直至尖一个方住，问共若干

法曰：以二四在位，又于后位添一作二十五，相乘得六百，复用五因合同。

[例 2]今有砖一垛，脚下四十个，问至实共若干？

答曰：共土整八百二十个。

法曰：以四十在位，用四十一乘之折半合同。

[例 3]今有柴叠垛脚下四个，逢实若干？

答曰：共柴十一个，法同前。

②$1+\sum_{i=1}^{n} 6i$

在下面的“算员束木法”中，《盘珠算法》给出了$1+\sum_{i=1}^{n} 6i$的计算公式：

$1+\sum_{i=1}^{n} 6i=\frac{1}{2\times 6}(6n)(6n+8)+1$（其中，6n 为外围木的根数）

算员束木法

员木一束数其周，一头添六互乘之，二六归之为实数，中心添一的升疑。

在歌诀之后，《盘珠算法》有一例子：

今有箱竹一相员束，问围一转三十二根，问该若干：

答曰：共竹一百零二根

法曰：以周三十二根在位，另以后位添六，共三十八，相乘得一千二进一十六根，复用五个折半，六归一遍，然后再添中心一根是也。

《盘珠算法》运用的公式是正确的，但此题却出得不合理。外围 32 根木不是 6 的倍数，这导致计算中除不尽。

③$1+\sum_{i=1}^{n}8i$

在下面“算方束木歌法”中，《盘珠算法》给出了$1+\sum_{i=1}^{n}8i$的计算公式：

$1+\sum_{i=1}^{n}8i=\frac{1}{2\times 8}(8n+4)^2$（其中 8n 为外围木的根数）。

算方束木歌法

方木一要数其周，两头添四不须忧，相乘二八归为准，劝君牢记在心头。

在歌诀之后，《盘珠算法》有一例子：

[例]今有方木一周匝四十根，问共若干？

答曰：共一百二十一根。

法曰：以四十根添四共四十四根，自相乘法一千九百三十六，复用五因折半八归一遍是也。

《孙子算经》卷下第 24 题为同类型的题目。

“算员束木法”、“算方束木法”在宋、元、明三代的数学著作中多称为“圆箭”和“方箭”。

3、数的记法

在《盘珠算法》中的“算至极数法”中有如下的数的记法：

算至极数法

十一曰十，十十曰百，十百曰千，十千曰万，十万曰亿，十亿曰兆，十兆曰京，十京曰垓，十垓曰秭，十秭曰穰，十穰曰沟，十沟曰涧，十涧曰正，十正曰载，十载曰极。

万万极曰恒河沙，万万恒河沙曰阿僧祇，万万阿僧祇曰那由他，万万那由他曰不可思议，　万万不可思议曰无量大数也。

在我国古代大数的记法主要有十进、万进、百进、万万进、倍进等[①]。《数术记遗》记载有数的三种记法：

黄帝为法，数有十等，及其用也，乃有三焉。……三等者，谓上中下也。其下数十十变之，若言十万曰亿，十亿曰兆，十兆曰京也；中数者万万变之，若言万万曰亿，万万亿曰兆，万万兆曰京也；上等数者穷则变，若言万万曰亿，亿亿曰兆，兆兆曰京也。

“极”、“恒河沙”、“阿僧祇”、“那由他”、“不可思议”、“无量大数”六名出自佛典，作为大数名在朱世杰的《算学启蒙》已经引入。

《盘珠算法》的大数记法是一种混合制：十进兼万万进。

4、倒数表

《盘珠算法》的“算升斗数法”是通过解决这样的问题：“已知每石的钱数，求每钱的升斗数”，从而编出了一份倒数表：

二钱一石算（每银一钱该五斗） 二钱一分一石（每钱四斗七升六合斗书）

二钱二分一石(每钱四斗五斗七合) 二钱三分一石(每钱四斗三升四合)

…… ……

一两零四分一石(每钱九升五合) 一两零五分一石(每钱九升四合)

一两零六分一石(每钱九升三合) 一两零七分一石(每钱九升二合)

一两零八分一石(每钱九升一合) 一两零九分一石(每钱九升)

一两一钱一石算(每钱八升九合)

《盘珠算法》的倒数表给出了91个数的倒数,，但不太完备，其起点数应为“一钱一石……”，不应为“二钱一石……”。

5、测望术

《盘珠算法》给出了如下的“度影量木歌法”。

度影量木歌法

度影量科世所稀，倒量裳丈影相随。将其杆影为实数，丈影归除即见之。

此歌诀相于于公式$H=\frac{L}{l}$（其中H为待测物高，L待测物的影长丈数，l为一丈杆的影长丈数)。在歌诀之后，《盘珠算法》给出了一例题：

① 李俨.中国古代数学史料[M].中国科学图书仪器公司,1954.158-167

今有木一颗,日影映地长五丈,随立[1]一丈杆在边,影长一丈二木五寸,问其木长短若干?

答曰:木长四丈[2]。

法曰:以影长五丈在位,以杆影一丈二尺五寸为法,用一二五四此归法合问.

测望术是我国传统数学的一项重要内容。《盘珠算法》的“度影量木歌法”利用了相似直角三角形的对应边成比例的性质进行长度测量。同类型的题目在《孙子算经》已经出现：其卷下第25题即是。对此类问题，《盘珠算法》和《孙子算经》给出的解法都是正确的。

6、《盘珠算法》中的诗题。

《盘珠算法》收录有若干首诗题，包括“算麻歌法”一首和“杂法”中的十余首。

算麻歌法

吾有一圈麻，根数未曾查，二十四根剥一两，看看剥得九斤麻

杂法

苏嫂有言会绩麻，李家张家都雇她，李麻六斤十二两，二斤四两是张麻，共织一十八丈布，二家分布闹喧哗，请问先生明算者，如何分得布无差？（苏嫂绩麻）

会算之人不用夸,三斤六两净棉花,织得布来三丈六,问君每尺几多花?（布算棉花）

一百馒头一百个僧，大僧三个更无争，小僧三人分一个，几多大僧几小僧?（僧分馒头）

一个公公不记年，手持节杖到门前，一两八铢泥丸子，每岁盘中放一丸，忽遭大雨未曾收，都在盘中做一丸，一总秤得八斤半，试问公公几多年？（公公不记年）

鸡兔笼中不识数，三十二头笼中露，算来脚有九十四，几个鸡来几个兔?（鸡兔同笼）

当年苏武去匈奴，不知去了几多年，分明记得天边月，二百二十八度圆.（苏武牧羊）

[1] “立”字原书为“五”。
[2] “丈”字原书为“寸”。

唐僧取经去西天，一去十万零八千，每月行程六十五[①]，问君去了几多年？（唐僧取经）

三寸鱼儿九里沟，头尾相连直至头，试问鱼儿多少数，请君问个算因由？（排鱼求数）

巍巍古寺在深坑，不知寺里几多僧，三百六十四个碗，看看有尽不差争，三人共食一碗饭，四个共尝一碗羹，请问先生明者算，算来寺里几员僧？（以碗知僧）

一个猪母十二奶，行一步时摆三摆，看看摆过九里岗，问君摆了几多摆？（猪奶摆动）

三百六十一个缸，问君分作几船装，不要一船多一只，不要一船少一缸。（缸分船装）

我问开店李三公，众客都来到店中，一房七客多七客，一房九客一房空。（李三公开店）

隔墙听得客分银，不知人数不知银，七两分之多四两，九两分之少半斤。（客人分银）

三部水车三人头，四部水车四人头，请问车水车君子，共该几百几十几个车槌头？（水车车水）

《盘珠算法》中“杂法”的诗题没有标题。为了区分，我们参考其他古算书在每题后的括号里为每题加了相应的标题。

此外，《盘珠算法》还有度量衡制度和马子暗数等内容。

八、《盘珠算法》数学思想简析

在本节的前面部分，我们较全面地介绍和分析了《盘珠算法》的基本内容。据此，我们可以归纳出其数学思想的几个方面的特征：

1、民间性

《盘珠算法》直接继承了宋元以来的民间数学传统。《盘珠算法》的原作者和徐心鲁参考了哪些算书，我们并不清楚，但《盘珠算法》基本内容都可在宋元的民间算书中找到渊源。如“度影量木法”可以从杨辉的《续古摘奇算法》找到

[①] 对本题，《盘珠算法》给出的解法是用七十五计算的。

出处，珠算的“九归口诀”可以从《乘除通变本末》找到渊源。杨辉的《田亩比类乘除捷法》三广田、不等四、腰鼓形四不等田等不规则田形的面积计算对后世的数学著作有很大的影响。《盘珠算法》的面积计算成就远远高于《九章算术》，所有这些不能不说《盘珠算法》至少间接受到了杨辉的数学著作的影响。

对《盘珠算法》成书明显有影响的算书有元代的《详明算法》和《算法全能集》。

《详明算法》，安止斋、何平子著，全书分上下二卷共 114 问。卷上由因法、乘法、加法、归法、减法、归除、求一、商除、约分等 9 部分共 31 问组成；卷下有异乘同除、就物抽分、差分、和合差分、端匹、斤秤、堆垛、盘量仓窖、丈量田亩、田亩组粮、修筑等 11 部分共 83 问组成。

《算法全能集》长沙人贾亨著。全书也分上下两卷。卷上由因法、加法、乘法、减法、归法、归除、求一、商除、异乘同除、就物抽分等 10 部分组成，卷下由并有分、和合差分、端匹、斤秤、堆垛、盘量仓窖、丈量田亩、修筑、约分、开平方等 10 部分组成。

《盘珠算法》的“归法总诀”、“归除口诀”、留头乘口诀、丈量田亩的基本口诀、盘量仓窖口诀与《详明算法》和《算法全能集》的有关口诀几乎完全相同，《详明算法》和《算法全能集》是流行于十四世纪元代的中国民间数学著作。看来，元代八闽数学虽然没有较重要的成果问世，但元代中国民间数学却哺育了明代八闽的民间数学。《盘珠算法》在广泛地吸收民间数学的营养后又反哺民间。

2、口诀化

口诀化是《盘珠算法》数学民间性的表现形式。《盘珠算法》用歌诀的形式来表述数学内容，使之文学化、歌诀化、趣味化。这对数学知识的传播，数学知识的普及起到了很大的作用。《盘珠算法》的许多题目，以歌诀的形式在民间广为流传，代代相延，至今仍存。《盘珠算法》全书共收有诗词歌诀 30 多首。从数学上讲，这些歌诀大致可以分成两类：

第一类是对各种算法、公式的说明。如讲算法歌诀的有“隶首上诀”、“退法要诀”“归法总诀”、“乘法”、“归除法诀”、“二字奇法”等等，讲公式的歌诀有：“算垛物诀法”、“田中算稻歌诀”、“算员束木法”、“算方束木歌诀”、“度影量木歌诀”、“田形歌诀”、“假分田地歌”、“算船法式”等等。

《盘珠算法》的每一个重要的算法和公式，都先以歌诀在前引入。这样的歌诀近20首，在形式上大多数是律诗或绝句。在读完许多歌诀之后，人们不需要另外解释也能知道某首歌诀所讲的算法或公式。

第二类是诗歌体题目。《盘珠算法》的“算麻歌法”和“杂法”中的许多题目即属此类。《盘珠算法》的诗题基本上用七言诗体。《盘珠算法》的诗题并不多，但题材很广泛，对社会、经济、文化生活各个方面都有涉及：有对写苏武牧羊、唐僧取经等家喻户晓的历史人物和传说故事的，有写李三公开店、客人分银、苏嫂绩麻等商业活动的，有写僧分馒头、以碗知僧、鸡兔同笼、排鱼求数等趣味故事的，还有写缸分船装、水车车水等日常生活和劳动的。这些题目语言浅显易懂，生动活泼，富于情趣，富于形象色彩，具有很高的艺术性，这些诗题绝大多数在《算法统宗》中也有收录。

刘亮对《算法统宗》的诗词题中所体现的美价值和特点作了详细的分析，认为这些诗词同一般的诗词一样，同样对读者具有审美的认识、教育和愉悦作用，会使读者获得美的享受。请看他对《算法统宗》的一诗题“赵嫂绩麻”的分析：

《算法统宗》的“赵嫂绩麻”题为：“赵嫂自言快绩麻、李宅张家雇了他。李宅六斤十二两、二斤四两是张家。共织七十二尺布，二人分布闹喧哗。借问卿中能算士，如何分得的无差”。刘亮认为：“这首诗塑造了一位勤劳能干的农村妇女——赵嫂，她同时受雇于李张两富家，为其绩麻纺织。……开首两句十四字，就描绘出赵嫂这一人物形象：贫寒妇女，勤劳干练，心直口快，手儿巧、活计重、工效高、出卖劳动力受剥削。尤其是自言快绩麻五个字，就把赵嫂这一人物的个性特征勾画得活神活现、栩栩如生了。而富户则既自私又颟顸，账算糊涂，为分七十二尺布而大吵大闹、互不相让”。末尾两句，“巧妙地提出了所要回答的问题，最后达到了以诗命题的目的。全部诗句，语气衔接连贯，结构紧密无缝，一气呵成”。[①]《盘珠算法》的“苏嫂绩麻”题与《算法统宗》的“赵嫂绩麻”题几乎完全一样。刘亮对“赵嫂绩麻”题的艺术价值分析完全可以套用在“苏嫂绩麻”题上，诗词歌诀易记、易传、富于趣味，富有吸引力，这使得许多诗题在广大百姓中广泛流传、也为不少人所津津乐道。

《盘珠算法》和《算法统宗》的许多歌诀貌似相同，同时又有细微差别。这

[①]刘亮.采用诗词形式命题是《算法统宗》的一大特色[J].新珠潮 1986（4）:17-20.

表明同一歌诀在不同的地域流行中产生了许多变种，也表明这些歌诀其中许多并不是两书作者的创造，是两书的作者采自民间。

3、实用性

《盘珠算法》刊印宗旨是便于“士民利用”，因此除了比较详细地介绍了珠算的加减乘除法口诀之外，《盘珠算法》还陈述了大量的日常生活实例，这也体现了明代浓厚的实用性商业数学的特色。《盘珠算法》的实用性数学思想体现在如下几个方面：

其一，寓算法公式于实例之中。《盘珠算法》并不单纯地介绍算法与公式，而是把公式和算法紧紧地与实际问题联系起来。如即使对乘法，《盘珠算法》没有某数乘某数这样的例题；对除法、也没有某数被某数除之这样的例题。

其二，种类繁多的实际应用问题。《盘珠算法》中所涉及的实际应用问题范围很广，有所谓的算垛法，田中算稻法、算圆束木法、算方束木法，还有田赋计算，各种形体的体积计算，各种田形的面积计算等等。特别在卷之二，全卷几乎都是面积计算问题，这反映了当时社会上土地买卖的频繁。

其三，大量的数学常识。《盘珠算法》中的数学常识如数的记法、度量衡制度、码子暗数等，内容十分丰富，是实际商业活动必备的基本知识。此外，为了人们在商业活动中计算方便迅速，《盘珠算法》还列了一份详细的倒数表。

4、地域性特色

《盘珠算法》中也有一些内容反映了南方生产生活的某些方面。“田中算稻法”和“算船法式”即是。“田中算稻法”给出了南方水田最重要的粮食作物水稻产量的计算方法。从《盘珠算法》所举的几道例题中，我们可以知道当时水稻亩产量，由此也可推知福建当时的农业技术水平。“算船法式”给出了船仓的容积计算方法。“算船法式”在《盘珠算法》中的记载可能是此类问题及其解法的最早记述，也反映了南方水路最重要的交通工具船在商业贸易中的重要作用。

与中国传统上的许多算书相似，《盘珠算法》这部在中算史上、珠算史上具有得要历史价值的数学著作，也是精芜并存，良莠共有的。《盘珠算法》最明显弊病是多处错乱、内容杂乱。这些错误我们在前面的引文中就校正了数十处，表现为错字漏字随处可见，有时无题有法、有时又题法分离，使人无法卒读。校刻不精，应该是《盘珠算法》流传不广的一个重要原因。

又如在《盘珠算法》中，介绍有“算孕妇生男生女诀法”和“断人生死诀法”等内容实在荒谬。然而这些在后来程大位的《算法统宗》中也有收录。这说明当时民间迷信蔓延，此外，《盘珠算法》还有“猪奶摆动”这样的题目，以迎合民间群众的低级趣味。

从数学本身而言，《盘珠算法》的内容较浅显，不仅没有我国传统数学中的开方、勾股、方程等较高深内容，甚至简单的分数运算也没有。当然，《盘珠算法》本来的目的是为了“士民利用”，并不是为了提高读者的数学水平。作为一本通俗读物，《盘珠算法》是为了便于文化程度较低的人自学使用。

第三节 《数学通轨》

一、柯尚迁和《数学通轨》

柯尚迁，福建省长乐县下屿人，字乔可，柯时偕弟，生卒年月日不详。明嘉靖二十八年（1549年）贡生，任京师（今河北省）邢台县丞，《长乐县志》无传，因此，柯尚迁的事迹不可详考[①]．《长乐县志·艺文志》中记载了柯尚迁的如下著述：“柯尚迁：《周礼全经释原》十二卷，又附录十二卷；《曲礼全经十五卷》。”

我国现代中算史界和珠算史界最早看到柯尚迁的《数学通轨》的学者是李俨先生[②]。《数学通轨》在日本内阁文库、宫内省图书馆，前田尊经阁等处都有藏本。李俨先生向日本友人借抄了日本三重县宇治山田市之“林崎文库”收藏的万历六年（1578年）柯尚迁《曲礼外集·补学礼六艺·附录数学通轨》一册。我国中算史界和珠算史界才得以了解该书。其实，《曲礼外集·补学礼六艺》我国有藏本。我国的南京图书馆收藏有柯尚迁的《曲礼外集》，但此《曲礼外集》缺少附录的《数学通轨》，所以很长一段此书公私书目都不录。李俨抄本《数学通轨》[③]现藏于中国科学院自然科学史研究所图书馆，《中国科学技术典籍通汇·数学卷》中收录有李抄本《数学通轨》的影印本。

李抄本《数学通轨》书后题有：“天明四年（公元一七八四年）甲辰八月吉

[①] 柯尚迁生平由下列史料编成：1、民国六年，孟昭涵修,李驹等纂的《民国长乐县志·选举志》记载：柯时偕,下屿人,(嘉靖)十九年贡照磨.柯尚迁,时偕弟,二十八年贡,邢台县丞.2、《数学通轨》叙：后学长乐柯尚迁乔可撰。

[②] 李俨.中算史论丛,第四集[M].北京:科学出版社,1955.18.

[③] 本文引用的《数学通轨》为李俨抄本《数学通轨》。

旦奉纳皇太神宫林崎文库，以期不朽，京都勤思堂村井古岩敬义拜”三行字，书前有柯尚迁万历六年（1578 年）自序：

近有青阳卢氏算法解，发明诸法，近而易知。愚以“数原”、“九九”、“归除法语”、图[①]式著之与前，名曰：“学算须知”，为教数首务。乃至归除、乘因分合法举例，举其要略，今习者易知，名曰：“归除诠要”。然后分九章之目，列古人注释，略表法例数条，以及“九章总义”。至于顾应祥、唐顺之二先生之《勾股全书》，不列于此。学者考焉，总名《数学通轨》，与《书学通轨》共成二集，附《曲礼》之后。思愚迷于二艺；实未能通朱子，欲补而未及。然于教法、世用，至切不可一日阙。故补其略以引其端，俟贤哲再著而成之耳。

可以看出，柯尚迁在序中简要地介绍了《数学通轨》的基本内容和写作目的。

李俨抄本《数学通轨》今天容易见到。实际上，《数学通轨》从未在我国失传，只是中算史家和珠算史家过去未发现罢了。据劳汉生考证，北京大学图书馆就藏有《曲礼全经附传十二卷附集三卷》四册（明万历间刻本，十行二十字本）。原题：“南京史部尚书赵锦参定，后学柯尚迁类成集释，南京巡按监察御史林应训校梓。”柯尚迁在自序中说：

迁即考定《周礼》、《仪礼》，以成全经，敬以《戴记》五篇，正经所存，类成《曲礼》，分其记传，以全圣五垂世大曲……尚迁遵表章云弘谟，类成全经，配《周》、《仪》为《三礼》。

劳汉生在仔细考察柯尚迁的北大图书馆的《曲礼全经》中《附集》三卷后，发现一卷为《乐本辨证》，一卷为《书学通轨》、一卷为《数学通轨》。这三卷补《曲礼》所阙，卷内有“佐伯文库”等印记。《曲礼全经》自序写于隆庆五年（1571年），《乐本辨证》序写于万历七年（1579 年），《数学通轨》序写于万历六年（1578年），由此可知，柯尚迁著成这套书，前后花了十时间。北京大学图书馆所藏《曲礼全经》附集的《数学通轨》内容和李俨抄本的内容完全相同[②]。

《数学通轨》中收有 36 幅珠算盘图式，在第一章“学算须知”的“初定算盘图式”条下画有一个十三档、梁上二珠、梁下五珠的算盘。

[①] “图”原书为“圆”。

[②] 劳汉生. 珠算与实用算术[M]. 石家庄:河北科学技术出版社, 2000. 78-79.

二、《数学通轨》中的珠算加减法

在柯尚迁的《数学通轨》中，有关珠算加减法的内容与吴敬、徐心鲁等人著作的有关内容基本一样。《数学通轨》也录有“起五诀”、“成十诀”、“破五诀”和“破十诀”，这四种口诀与吴敬的同名口诀的诀文完全相同。在《数学通轨》中，《盘珠算法》的“隶首上诀”变成了“九九上法语”，“退法要诀”变为“九九退法语”。虽然上诀和下诀的名称有所改变，但诀文几乎完全相同，请看柯尚迁的加减法口诀：

九九上法语：

一上一，一下五除四，一退九进一十

二上二，二下五除三，二退八进一十

三上三，三下五除二，三退七进一十

四上四，四下五除一，四退六进一十

五上五，五去五进一十

六上六，六上一去五进一十，六退四进一十

七上七，七上二去五进一十，七退三进一十

八上八，八上三去五进一十，八退二进一十

九上九，九上四去五进一十，九退一进一十

九九退法语

一退一，一退十还九，一上四退五。

二退二，二退十还八，二上三退五

三退三，三退十还七，三上二退五[1]

四退四，四退十还六，四上一退五

五退五，五退十还五

六退六，六退十还四（四下五除一）

七退七，七退十还三（三下五除二）

八退八，八退十还二（二下五除三）

九退九，九退十还一（一下五除四）

可以看出，《数学通轨》的加减法口诀与《盘珠算法》的略有不同。柯尚迁

[1] “三上二退五”原书无，但原书多了“一上四退五”。

并没有对一些较复杂的口诀作出解释。另外，对退六诀、退七诀、退八诀、退九诀等减法口诀，柯尚迁分别作了补充，如“六退十还四”，加上了“四下五除一”，“七退十还三”加上了“三下五除二”等等。柯尚迁认为在进行减六、减七、减八、减九等计算时，可能会用到这些口诀，这反映了柯尚迁的心思缜密。

《数学通轨》上也记载有“九盘清”的练习法。

在《盘珠算法》和《数学通轨》之后，珠算书上只录上法、退法口诀，不再载图式。

三、《数学通轨》中的珠算乘法

1、《数学通轨》中的乘法口诀

《数学通轨》中的乘法口诀基本上为“小九九”，现录如下：

习九九数总念歌（乘除加减皆呼）

一一如一　一二如二　二二如四　一三如三　二三如六　三三如九　一四如四　二四如八　三四一十二　四四一十六　一五如五　二五成一十　三五一十五　四五成二十　五五二十五　一六如六　二六一十二　三六一十八　四六二十四　五六成三十　六六三十六　一七如七　二七一十四　三七二十一　四七二十八　五七三十五　六七四十二　七七四十九　八七五十六　九七六十三　一八如八　二八一十六　三八二十四　四八三十二　五八成四十　六八四十八　七八五十六　八八六十四　九八七十二　一九如九　二九一十八　三九二十七　四九三十六　五九四十五　六九五十四　七九六十三　八九七十二　九九八十一

可以看出，《数学通轨》中的乘法口诀与通常的小九九稍稍有区别。《数学通轨》的这三句口诀：“八七五十六，”“九七六十三”　“九八七十二”不是小九九口诀，《数学通轨》的乘法口诀有48句，比小九九多了以上3句。

2、《数学通轨》中的珠算乘法基本功练习

《数学通轨》的“第一学算须知”中载有乘法基本功的练习盘图。《数学通轨》把“123456789×2，123456789×3……123456789×8，123456789×9”这些计算在算盘上实现，然后再把这些计算结果用归法还原。

3、《数学通轨》的普通珠算乘法

《数学通轨》“第一学算须知”指出了珠算乘法的一般方法：

因乘曰：以所有物数为实，以所求物价为法，法实相命言十就身，言如隔位，次第以法求之。

在乘法中，我国古算书通常称被乘数为实，乘数为法。随后，柯尚迁把普通乘法分成“因法”和“乘法”两类，并用歌诀指出这两种乘法的计算技巧。

因法（法实尾位以法相换．言上就身　言如下位次第求之）

诗曰：合数九因须记熟 呼如下位算为先 变其身数呼求十 从上因之十进前

乘法（二以上位数多者用此法，位求数次第算起还原）

诗曰：下乘之法此为真　位数先将第二因　三四五来乘遍了　却将本位破其身

在《数学通轨》第二章“归除诠要”的“九因法总数”条目中柯尚迁进一步对因法和乘法的异同之处作了分析：

因法即乘法，但位数少者为因，位数多者为乘，因乘二法俱从实位后等至前破身。

（1）因法

柯尚迁在“九因法总数”之后，举了八个不同因数的因法实例。柯尚迁对因数为2，因数为3的两例作了详细的解释，从他的说明中，我们可以体会他是怎样因法的。

[例1]稻一百二十三石，每石价钱二钱，总该银若干？

用二因：二三如六（除三二，下位加六） 二二如四（除二，下位加四）一二如二（除一，下位加二）总该银二十四两六钱。

[例2]稻四百五十六石，每石价钱了钱，总该银若干？

用三因，三六一十八（破身除五，下位加八）三五一十五（破身除四，下位加五）三四一十二（破身除三，下位加二）总该银一百三十六银八钱。

柯尚迁以上两例为典型，以下面六例为补充，使习算者很清楚地知道因法在算盘上怎样进行，从而学会珠算因法。

[例3]米七十八石九斗，每石价银四钱，总该银若干？

用四因，四九三十六（解同前）四八三十二（解同前）四七二十八（解同前）总银三十一两五钱六分

[例 4]米九十八石七斗，每石价银五钱，总该银若干？

用五因　五七三十五　五八方四十　五九四十五（解俱同前）

总该银四十九两钱五分

[例 5]田六十五亩四分，每亩科米六升，总该正米若干？

用六因　四六二十四　五六方三十　六六三十六（解同前）

总该正米三石九斗二升四合。

[例 6]夏麦三石二斗一升，每斗科银七分，总该苦干？

用七因　一七如七　二七一十四　三七二十一

总该夏麦银二两二钱四分七厘。

[例 7]铁一千四百五十斤，每斤价银八厘，总该银若干？

用八因　五十方四十　四八三十二　一八如八

总该银一十一两六钱。

[例 8]盐八百四十七包，每包价银九分，总该银若干？

用九因 七九六十三　四九三十六　八九七十二

总银七十六银二钱三分。

（2）多位数乘法

在《数学通轨》的第二章“归除诠要”的“乘法”条目中，柯尚迁首先指出了乘法的含义：

乘法即因法，一位为因，多位为乘。此与加法不同。加法至本身有加无除，乘法至本身破除不加，二位乘法，法与实不拘前后置之。

这里的“加法”不是指通常的加法，是一种特殊乘法（后面要介绍）。柯尚迁在这里还指出了乘法满足交换律。在指出乘法的含义之后，柯尚迁用 3 例示范了乘法：

[例 1]稻三百六十五石，每石价银二钱伍分，总银若干？

五五二十五　二五一十（破身）　五六方三十　二六一十二（破身）

三五一十五　二三如六（破身）

总该银九十一两二钱五分。

[例 2]稻三百六十五石，每石价银二钱四分五厘，总该银若干？（三位乘法）

五五二十五　五四方二十　二五得一十（破身）

五六方三十　四六二十四　二六一十二（破身）

三五一十五　三四一十二　二三如六（破身）

总该银八十九两四钱二分五厘。

[例 3]稻三百六十五石，每石价银二钱三分七厘五毫，总该银若干？（四位乘法）

五五二十五　五七三十五　三五一十五　二五成一十（破身）

五六方三十　六七四十二　三六一十八　二六一十二（破身）

三五一十五　三七二十一　三三如九　二三如六　（破身）[1]

总该银八十六两六钱八分七厘五毫。

《数学通轨》录有的多位数乘法口诀（见本节第 3 部分的开始）为留头乘口诀，但从例 2，例 3 中可以看出，这两例的口诀顺序并不是留头乘，其口诀顺序都是与今天的笔算乘法相同。这种珠算乘法称为掉尾乘。可见，柯尚迁混同了留头乘和掉尾乘。

最早混同留头乘和掉尾乘的并不是柯尚迁。早在《详明算法》的乘法条中有“二以上位数多用此法，从末位小数算起”的说明，下文即录有留头乘口诀（见上一节）；《详明算法》所举的有关例题的口诀顺序是掉尾乘，并不是留头乘，可见，《详明算法》早在柯尚迁之前就已经混同了这两种乘法。

4、《数学通轨》中的特殊乘法

《数学通轨》中的特殊乘法有两种：“加法”和“金蝉乘法”

1、加法

在《数学通轨》的第二章的开始部分，柯尚迁指出了“加法”的含义。

加法义：呼九九相生之数，留身增添谓之加。

在后面的“加法”部分，柯尚迁对“加法”作到了进一步解释：

加法，此法从实位后加至本身，至本身不可破除。法首位一数亦除去不呼，不然，恐同乘法。

随后，柯尚迁用两例对“加法”加以示范：

[例 1]稻四百二十七石，每石价银一钱八分，总该银若干？（一位加数）

用八加法（法位除一留八）

[1] “(破身)”原书无。

七八加五十六，二八加一十六，四八加三十二

总该银七十两八钱六分

[例 2]单位加数

稻七百零八石五斗三升，每石加稻四斗，总该若干？

用加四法

三四加一十二　五四加二十　四八加三十二　四七加二十八

总该稻本利九百九十一石九丰四升三合。

“加法”也被称为“定身乘”或“身外添几”，是最早的特殊乘法，凡乘数首位是 1 的，首位 1 省去不乘，只把次位以下各位乘被乘数，乘积加在被乘数本身里，就得到总积。定身乘在《夏侯阳算经》的“求地税”和“说诸分”各章已经被广泛运用。《夏侯阳算经》的定身乘是在算筹中实现的，而《数学通轨》的定身乘法是在算盘中实现的。

（2）金蝉乘法

柯尚迁在《数学通轨》的第二章开始部分的“金蝉乘法义”中指出了金蝉乘法要领：

金蝉乘法义

不用九字相生之数，但置一筒原法，又置一筒倍法动员会云除二加倍，去一还元。又云：起一始原法加之，起二如倍法加之。

在“金蝉乘法义”之后，柯尚迁又举了一“金蝉乘法”的实例：

如米一石价银六钱四分，将米为实，以六钱四分为法；又另置一个倍法，得一两二钱八分。呼云：起一加六四，起二加一二八，只此二句代乘法，皆从实后置数，次第因而加之。又云：呼如加隔位，言十加次位，所谓成十之数，庶不叠于本位也。

今解一例 12×64=768 如下①：

实		积	原法	倍法	
12			64	128	
-2		+128　起二加一二八（言十加次位）			
1		128	64	128	
-1		+64　起一加六四（呼如加隔位）			
		768	64	128	

① 华印椿.中国珠算史稿[M].北京:中国财政经济出版社,1987.188.

四、《数学通轨》中的除法

1、《数学通轨》中的归法：

（1）九归口诀

在《数学通轨》的第一章“学算须知”的“九归总歌法语”条目中，柯尚迁写下了如下的归法口诀：

九归总歌法语

一归　无法定身除　又曰一归不须归，其法故不立

二归　二一添作五　逢二进一十　逢四进二十　逢六进三十　逢八进四十

三归　三一三十一　三二六十二　逢三进一十　逢六进二十　逢九进三十

四归　四一二十二　四二添作五　四三七十二　逢四进一十　逢八进二十

五归　五一倍作二　二五倍作四　五三倍作六　五四倍作八　逢五进一十

六归　六一下加四　六二三十二　六三添作五　六四六十四　六五八十二　逢六进一十

七归　七一下加三　七二下加六　七三四十二　七四五十五　七五七十一　七六八十四　逢七进一十

八归　八一下加二　八二下加四　八三下加六　八四添作五　八五六十二　八六七十四　八七八十六　逢八进一十

九归　下位加一倍，逢九进一十

可以看出，《数学通轨》的归法口诀与《盘珠算法》的归法口诀几乎完全相同。

（2）《数学通轨》中的归法基本功练习

本节《数学通轨》的乘法部分已经介绍了乘法基本功练习的算盘图式以及相应的归法练习算盘图式。实际上，《数学通轨》的归法基本功练习的内容远远不只这些，十分丰富。除盘图之外，归法基本功还有如下几种：

①被除数是一位数的归法练习。在这种练习中，归法口诀初步在算盘中具体体化了，在《数学通轨》第一章“九归重演法语”条中，柯尚迁用81句口诀全面地介绍了这种归法练习：

九归重演法语

一归　（一）逢一进一十　　（二）逢二进二十

（三）逢三进三十　　（四）逢四进四十

（五）逢五进五十　　（六）逢六进六十

（七）逢七进七十　　（八）逢八进八十

（九）逢九进九十　　一归之法名混归法

二归　（一）二一添作五（二人分一两，各五钱）

（二）逢二进一十　　（三）逢二进一十（又呼二一添作五）

（四）逢四进二十　　（五）逢四进二十（又呼二一添作五）

（六）逢六进三十　　（七）逢六进三十（又呼二一添作五）

（八）逢八进四十　　（九）逢八进四十（又呼二一添作五）

（二人分九两，各四两五钱）

三归　（一）三一三十一（三人分一两，各三三）

（二）三二六十二（三人分二两，各六六）

（三）逢三进一十（三人分三两，各一两）

（四）逢三进一十（又呼三一三十一）

（五）逢三进一十（又呼三二六十二）

（六）逢六进二十（二人分六两，各二两）

（七）逢六进二十（又呼三一三十一）

（八）逢六进二十（又呼三二六十二）

（九）逢九进三十（三人分九两，各三两）

四归　（一）四一二十二（又呼四二添作五）

（二）四二添作五（四人分二两，各五钱）

（三）四三七十二（又呼四二添作五）

（四）逢四进一十（四人分四两，各一两）

（五）逢四进一十（又呼四一，又呼四二）

（六）逢四进一十（又呼四三，又听四二）

（七）逢四进一十（又呼四三，又呼四二）

（八）逢八进二十（四人分八两，各二两）

（九）逢八进二十（又呼四一，又呼四二）

五归　（一）五一倍作二（五人分一两，各二钱）

（二）五二倍作四（五人分二两，各四钱）

（三）五三倍作六（五人分三两，各六钱）

（四）五四倍作八（五人分四两，各八钱）

（五）逢五进一十（五人分五两，各一两）

（六）逢五进一十（又呼五一倍作二）

（七）逢五进一十（又呼五二倍作四）

（八）逢五进一十（又呼五三倍作六）

（九）逢五进一十（又呼五四倍作八）

六归 （一）六一下加四（六人分一两，各一六）

（二）六二三十二（六人分二两，各三三）

（三）六三添作五（六人分三两，各五钱）

（四）六四六十四（六人分四两，各六六）

（五）六五八十二（六人分五两，各八三）

（六）逢六进一十（六人分六两，各一两）

（七）逢六进一十（又听六一，又呼六四）

（八）逢六进一十（又呼六二，又呼六二）

（九）逢六进一十（又呼六三添作五）

七归 （一）七一下加三（七人分一两，各一四）

（二）七二下加六（七人分二两，各二八）

（七）逢七进一十（七人分七两，各一两）

（八）逢七进一十（又呼七一，以呼七一）

（九）逢七进一十（又呼七二，又呼七六）

八归 （一）八一下加二（又呼八二，又呼八四）

（二）八二下加四（又呼八四）

（三）八三下加六（又呼六，又呼八七）

（四）八四添作五（八人分四两，各五钱）

（五）八六七十四（又呼八四）

（六）八六七十四（又呼八四）

（七）八七八十六（又呼八六，又呼八四）

（八）逢八进一十（八人分八两，各一两）

（九）逢八进一十（又呼八一，又呼八二）

九归　（一）九一下加一（九八分一两，各一一）

（二）九二下加二（九八分一两，各一一）

（三）九三下加三

（四）九四下加四

（五）九五下加五

（六）九六下加六

（七）九七下加七

（八）九八下加八

（九）逢九进一十

在“九归重演法语”中，柯尚过把“九归总歌”的归法口诀的含义和用法在算盘中体现出来，如对八归中的“八四添作五”，柯尚迁解释为“八人分四两，各五钱”。从现代意义上讲就是 4÷8=0.5，又如对 8÷6，柯尚迁用了六归的三句口诀：“逢六进一，”“六二（三十二），”“六二（三十二）”即先把 8 分成 6 和 2，对 6“用逢六进一”；对 2 用“六二（三十二），”即 2÷6=0.3 余 0.2，对 0.2 用“六二（三十二）”即 0.2÷6=0.3（余 0.02），由此可得 8÷6=1.33（余 0.02）。对“九归重演法语”的其他口诀，我们可以同样清楚地理解其含义和用法。

②被除数为 123456789 的归法练习。

在《数学通轨》第二章“归除诠要”的“九归分数”条目中，柯尚过首先解释了“九归分数”的含义：

九归分数，二人分数可用此二归，三人用三归，四人用四归，五人用五归。举此为例。

因此，九归分数是指把某数平均分成若干（指 2 至 9 之间的某个自然数）份，柯尚迁用下面 8 个例子清楚地表明了“九归分数”的含义：

[例 1]银一万二千三百四十五两六钱七分八厘九毫，二人分，各若干？

二归（此数用五因可代）

二一添作五，逢二进一十，逢二进一十，二一添作五，逢四进二十　逢四进二十　二一添作五　逢六进三十　逢六进三十　二一添作五　逢八进四十　逢

八进四十　二一添作五

每人该银六千一百七十二两八钱三分厘四毫五丝。

在计算完后，柯尚迁为了检验该结果的正确性，用乘法还原；

二因还原

二五成一十　四二如八　二九一十八　二(三)三如六　二八十六　二二如四　二七一十四　一二如二　二六一十二

三归三因还原，至九皆仿此。

柯尚迁的另外七例是把本例的钱数三人分，四人分……九人分。所有这八例是被除数都为123456789，除数分别为2，3，……9的归法练习例题。和《盘珠算法》一样，柯尚迁要求习算者在算完除法后，用相应的乘法还原以检验计算结果的正确性；对乘法，则要求用除法还原。

2、《数学通轨》中的归除法

在《数学通轨》第二章的"归除法"条目中，柯尚迁首先给出了归除法的基本口诀：

诗曰；惟有归除法更奇　　将身归了次除之

或遇本归归不得　　撞归之法莫教迟

有归若是无除数　　起一还将原数施

有人识得其中意　　算学虽深可尽知

在上节中，我们已经知道柯尚迁的归除法基本口诀与当时流行的归除法基本口诀几乎完全相同。随后，柯尚迁对归除法基本口诀作了解释：

归除者，将法首一位呼为归法，其三位、二位、四位俱呼为除法，此先归而后除也。凡归时，又须尽归，归之若不尽归，归之则次位除不尽也。然又不可归尽，约存有可除者。归尽，则无除也。十一人分之数，用一归一除；二十二人分数，用二归二除；至九十九人分数，用九归九除。此将"身归了次除之"之谓也。

前位归除已定，后再不可复归。如或本归归之不得，又须撞起归数。如：见一无归撞作九一，见二无归撞作九二，至见九无归撞作九九。此撞归之谓也。或起一作十，然后归之亦可。

若已归，而后位无除，又将已归内起一数于下位还原。原数者，法之首位归数是也。如一归无除，就归内起一，下位还一；二归无除，就归内起一，下位还

二；以至九归无除，就归内起一，下位[①]还九。此起一还将原数施之谓也。

柯尚迁将归除法基本口诀第2句至第6句作了详尽的解释。不难发现，这5句口诀是此诗诀的精华部分，在上一节《盘珠算法》的归除部分，我们已经通过实例理解了此诗诀，但《盘珠算法》中没有撞归歌诀等。柯尚迁在《数学通轨》第一章的"撞归法语"和"还原法语"两条中对归除法基本口诀作了补充。

撞归法语（此法语归除所用）

一归：见一无除作九一　　二归：见二无除作九二

三归：见三无归作九三　　四归：见四无归作九四

五归：见五无归作九五　　六归"见六无归作九六

七归：见七无归作九七　　八归：见八无归作九八

九归：有归无除作九九，余仿此。

还原法语（此法语亦归除所用）

（一）归一已归无除起一还一　（二）归二已归无除起一还二　（三）归三已归无除起一还三　（四）归四已归无除起一还四　（五）归五已归无除起一还五　（六）归六已归无除起一还六　（七）归七已归无除起一还七（六）　（八）归八已归无除起一还八　（九）归九已归无除起一还九（俱出归内起一于次位，或还一，或还二，或还三）

撞归口诀在元代的《算法全能集》和《详明算法》中已经出现。

《数学通轨》虽有"撞归法语"和"还原归语"，但是示例中，都没有用上。《数学通轨》的归除法例题甚至没有《盘珠算法》的复杂。

在《数学通轨》第二章的"归除法分数"条目中，柯尚迁有给出了九道归除练习例题。这九题的被除数都是123456789，除数分别为21，32，43，54，65，76，87，98，99。对123456789÷21和123456789÷32，柯尚迁给出了详细的解法：

[例1]米一万二千三百四十五石六斗七升八合九勺，二十一分之

二归一除

二一添作五（首位归），一五如除五（二位除）；

二一添作五（二位归），逢六进三十（三位进一），一八如除八（三位除）；

[①] "下位"二字原书无。

二一添作五（三位归），逢四进二十（四位进三），一七如除七（四位除）；

二一添作五（四位归），逢六进三十（五位进四），一八如除八（五位除）；

二一添作五（五位归），逢六进三十（六位进五），一八如除八（六位除）；

二一添作五（六位归），逢八进四十（七位进六），一九如除九（七位除）；

逢八进四十（八位进七），一四如除四（八位除）；

二一添作五（八位归），逢四进二十（九位进八），一七如除七（九位除）.

（余三未除）

每人该米五百八十七石八斗八升九合四勺七抄，余三未除（不乘）.

[例 2] 前米一万二千（云云）九勺，三十二人分之

三归二除

三一三十一（首位归），二三如除六（二位除）；

三二六十二（二位归），逢六进二十（三位进二），二八除十八（三位除）；

三一三十一（三位归），逢六进二十（四位进三），二五除一十（四位除）；

三二六十二（四位归），逢六进二十（五位进四），二八除十六（五位除）；

三一三十一（七位归），逢三进一下（八位进七），二四如除八（八位除）；

三二六十二（八位归），二六除十二（九位除）.

在上一节中，我们已经碰到了更复杂的归除计算。柯尚迁的归除法的示例简单得多，在此不再详解，请参阅上节有关部分。

3、《数学通轨》中的特殊除法

《数学通轨》中的特殊除法有两种：金蝉归除法和定身除法

（1）金蝉归除法

在《数学通轨》第二章的“金蝉归除义”条中，柯尚迁指出的金蝉归除法的含义和方法：

金蝉归除义

不用归因之数，但置一个原法，又置一个半法．只云：进二除倍，添一还原，满法[①]过身一，折半当身五．又云：进一如原法除之，进五如半法除之．

柯尚迁随之以除数为 64 为例对“金蝉归除”法作了进一步的说明。

如银六钱四分买一石，将银为实，以六钱四分为法，又另置一个法，得三钱

[①] “法”原书为“去”。

二分，呼云：进一除六四，进五除三二。只此二句以代归除，皆从实前置数，次第除之。又云：进一身前位，进一前隔位，庶不隔本位。

柯尚迁并没有给出具体的“金蝉归除”法的实例。华印椿先生根据柯尚迁的说明编了一实例：

1664÷64=26

商　　　　　实　　　原法　　倍法　　半法

		1664	64	128	32

+20　　　　　　（-1280）进二除倍

20		384	64	128	32

+5　　　　　　（-320）进五如半法除之（进五身前位）

25		164	64	128	32

+1　　　　　　（-64）进一如原法除之（进一前隔位）

26			64	128	32

华先生认为：柯氏的金蝉除法有“进一”、“进二”、“进五”三种立商。这三种立商的档位都应有“身前位”和“前隔位”两类，但柯氏只提“进一前隔位”和“进五身前位”，漏掉“进一身前位”（106÷64）和“进五前隔位”（如 95÷15），对“进二”的档位也没有提及，所以不够全面。[①]

（2）定身除法

柯尚迁在《数学通轨》中也称定身除法为“减法”，与定身乘法或“加法”相应。在《数学通轨》第二章的“减法义”条中，柯尚迁给出了定身除法的定义：

减法义：或者，即除也，呼九九相生之数约存原本之数而除这谓之减。

在第二章的“定身除法”条中，柯尚迁首先用歌诀来表现定身除法的基本技巧。

定身除法（盘前数谓之实，盘后数谓之法，呼者，呼后法数，除者，除前实数）。

除法须知先定身　先定身位减为真　十除本为零除次　身定除余妙入神

随后，柯尚迁对上述歌诀作了进一步的解释。

定身除者，先定实之身数，后除实之余数，即减法也。但法首位一十一百一

[①] 华印椿. 中国珠算史稿（M）. 北京：中国财政经济出版社, 1987. 188-189.

千一万之数也用此法。

可见，定身除是除数首位为 1 的多位数除法。柯尚迁非常重视定身除法。在《数学通轨》中，柯尚迁给出了大量的定身除的例子，这在明代的珠算著作中是少见的。

《数学通轨》中的定身除分成四种：其一为一位定身除（除数却为两位），其二为二位定身除（除数为三位，第二位不为零），其三为三位定身除（除数为四位，第二位不为零），其四为空位定身除（除数的第二位为零）。

一位定身除为除数 11 至 19 的两位数法。柯尚迁对一位定身除的介绍极为详细。在《数学通轨》中有 9 个一位定身除的例子，在这 9 例定身除中，被除数都是 123456789，除数从 11 至 19 之间变化。今以柯尚迁的两列为例，看其如何进行一位定身除的：

例 1　米一万二千三百四十五石六斗七升八合九勺，十一人分之。

一除法（法位除去十数，只留一位呼之）

一一如除一（首位定一为身，二位除一），一一如除一（二位定一为身，三位除之）一二如除二（三位定二为身，四位除二），一二如除二（四位定二为身，五位除二[①]），一三如除三（五位定三为身，六位除三）一三如除三（六位定三为身，七位除三[②]）……余五来除。每人该米一千二百二十二石三斗四合四勺，余五一加法还原（后略）

柯尚迁此例 123456789÷11 并未算完，但给出了商和余数，柯尚迁把结果用“加法”（即定身乘法）还原。

例 2　前来一万二千（云云），十二人分之。

二除法（法位除去十数，只留二数呼之，此数用二归可见，以二六十二故也。）

一二如除二（首位定一，二位除二），二二如除四（三位定二为身，除四退十还六），二八除十六（四位定八为身，除一十六退十还四），二八除十六（五位定八为身，除一十，下位除六），二六除一十二（七位定六为身，除一十，下位除二），二五除一十（八位定五，就除一十），二七除一十四（九位定七，除一十四）二五作一十（十位定五为身，除一十）。

每人一千零二十八石八斗零六合五勺七抄五撮

[①] “二” 原书为 “一”

[②] “七位除三” 原书为 “九位除四”

柯尚迁认为123456789÷12可用123456789÷2÷6去计算，但在此例中，柯尚迁用定身除计算，此例今解如下（上例比此例更简单，解同此例）

1	2	3	4	5	6	7	8	9						2

（初盘）

1	0	3	4	5	6	7	8	9						2

（第一盘）一二如除二（首位定一，二位除二）

1	0	2	10	5	6	7	8	9						2

（第二盘）二二如除四（三位定二为身，除四退十还六）

1	0	2	8	9	6	7	8	9						2

（第三盘）二八除十六（四位定八为身，除一十六退十还四）

1	0	2	8	8	0	7	8	9						2

（第四盘）

1	0	2	8	8	0	6	6	9						2

（第五盘）

1	0	2	8	8	0	6	5	9						2

（第六盘）

1	0	2	8	8	0	6	6	7	6					2

（第七盘）

1	0	2	8	8	0	6	6	7	5					2

（第八盘）

柯尚迁在《数学通轨》中对其它三种定身除各举了一例。

定身除也称“身外减几”，同定身乘一样，在《夏侯阳算经》中已经出现。在《夏侯阳算经》卷下的“说诸分”章仅有第二十七题一例定身除。《杨辉算法》和元明各代算书都收录有此法。但从上例的解中可以看出定身除运算，需要象商除法（法同今天的笔算除法）一样需要心算估商。在估得确商后，才可把商数同除数次位以下各位相乘，进行乘减。在归除法流行的时代，归除法的算法具有程序化、机械化的特点，因此人们不是容易接受定身除的。柯尚迁本人虽然重视定身除但也不忽视混归除法（混归除法的除数首位为1，同定身除，但实质上是用归除法计算）。

五、《数学通轨》中的“九章释例”

《数学通轨》的第三章为“九章释例”。在“九章释例”中，柯尚迁按传统九章对数学进行分类，在释例中阐述自己对九章的新理解。柯尚过的“九章释例”

分为九节，现分节详细介绍如下：

第一节为"一曰方田（以御田畴界域）"。柯尚迁在此节中首先指出了面积计算的最基本方法和面积单位之间的换算关系等。

注法曰：广纵相乘为积（以亩法二百四十步为一亩，以二十四步为一分曰方田）。凡田一亩计积二百四十步，一步各方五尺（倍作十尺）。横二步，直一百二十步为一亩（横十五步，直十六步；横十步，直二十四步），凡田百亩为一顷。五尺为一步，三[①]百六十步为一里百六十步为里，计一百八十丈，约人行一千步也。人行一步只二尺，千步为里，万步为十里，为辅宜也。

根据一亩=240步，柯尚迁指出了积步换算成积亩的换算技巧：

除田之法不一，或用二四归除，或用四归六归各一回，或用三八归除，又或用五因六归各一回，又或用金蝉法。用法虽异，见田之数则一……

上述换算技巧相当于 $A \div 240 = A \div 4 \div 6 \div 10 = A \div 3 \div 8 \div 10$ 于等等。

对上述换算技巧，柯尚迁又在"算田截法"歌中表现出来。

算田截法

量田之法少人知，不乘一数便留知

三步之中用八归，四步由来六归是

五步还宜六八归，六数四归无走作

八上三归无改移，十二将来折一半

十六三而加倍齐，二十四中随数喝

廿五中分六八归，三十二上尤甚准

四因还要用三归，四十八上加一倍

八卦宫中谁得知，三归八因尤最准

胜如神见不差移，七二倍之加遍五

九十六上四因之，十五之中逢二八

七五之中四八归，三七半时当八八

九弓加五四归奇，十八折之加五定

三六之中加五施，此是明师真口诀

千金不度世人知

[①] "三"原书为"二"。

对于积步与积亩的换算关系，柯尚迁却用27句口诀表现出来，看来，当时社会上普通人普遍对除数是二位以上数的除法的计算仍感困难。

本书的最后一部分为“田亩积步求田法”，是本节的精华。柯尚迁在本部分指出了十余种田形的面积的求法。

四方田（正方形），面积公式 $S=a^2$（a为边长）

四不等田（普通四边形）面积公式 $S=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}$ （a，b与c，d为两组对边）

梯形田，面积公式 $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$ （a为上底，b为下底，h为高）

员田（圆），面积公式 $S=\frac{l\cdot d}{4}$（l为周长，d为直径）

直长田（长方形），面积公式 $S=ab$（a为长，b为宽）

抹角田（矩形去一角后得到的五边形），面积公式 $S=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}$（a，b与c，d为两组平行的对边）

曲尺田（曲尺形），面积公式 $S=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}$（a为内曲，b为外曲，c为一头横，d为另一头横）

圭形田（等腰三角形），面积公式 $S=\frac{ah}{2}$（a为底，h为高）

勾股田（直角三角形），面积公式 $S=\frac{ab}{2}$（a为勾，b为股）

弧矢田（弓形），面积公式 $S=lh$（l为弧长，h为弓高）

梭田（菱形），面积公式 $S=\frac{ab}{2}$（a、b为二对角线）

牛角田（牛角形）面积公式：$S=\frac{l_1+l_2}{2}\cdot\frac{d}{2}$（$l_1$，$l_2$为二弧长，d为横长）

强鼓田（共底的两等腰梯形拼成的田形，共底短于其它的底），面积公式：$S=\frac{a_1+a_2+2b}{4}\cdot h$（$a_1$为上梯形的上底，$a_2$为下梯形的下底，b为共底，h为高）

鼓形田（共底的两等腰梯形拼成的田形，共底长于其它两底），面积公式：$S=\frac{a_1+a_2+2b}{4}\cdot h$（$a_1$为上梯形的上底，$a_2$为下梯形的下底，b为共底，h为高）

除了上述田形中，《数学通轨》中还有“碗磬田”、“眉形田”、“六觚田”、“凸形田”、“凹形田”等田形的面积计算。田形的具体形状在《数学通轨》中都没有绘出，《数学通轨》的面积计算内容比《九章算术》的丰富，但与《盘珠算法》相比，《数学通轨》的面积计算的成就稍逊一筹。

第二节为“二曰[1]粟米（古注以御交质变易）”。柯尚迁首先引用了唐顺之和“古注”对“粟米”释义：

唐氏曰：物有以多而易寡，价有以贵而易贱，于是有粟米。则乘除互换之间，而多遂与寡相当，贱遂与贵相当，而数齐矣。以粟易米，则以粟率乘，以米率除；以米易粟，则以米率乘，以粟率除。以贵物易贱物，则以贵率乘，以贱率除；以贱物易贵物，则以贱[2]率乘，以贵[3]率除。凡物相易，皆以本率乘，以所易之物率除。谓之粟米者，因粟米以名诸物也。

古注：换易乘除法曰，以所求率乘所有数为实，以所有率为法。实如法而一。归以法除之也。

今传本《九章算术》粟米章的“今有术”为：

今有术曰：以所有数乘所求率为实，以所有率为法，实如法而一。

可以看出，柯尚迁此节所谓“古注”与《九章算术》的“今有术”大体相同。《九章算术》的“今有术”简明扼要，唐顺之的释义长而通俗，二者形成鲜明对照，但可以看出，二者对“粟米”的理解是一致的。

柯尚迁在本书最后给了四道例题，在此录两道如下：

[例 1]异乘同除法为例（此即先除后乘之法，今先用乘而后用除。庶其法不谬）。

原米二十三石三斗六升，卖银八两七钱六分，今剩米三石四斗四升，仍该米银[4]若干？

法应先置八两七钱六分，以二十三石三斗六升为法除之。除得每石该银三钱七分五厘，即以三石四斗四升乘之。此正法也。今变先乘后除于后：

先置八两七钱六分，以米三石四斗四升乘之得三十两一钱三分四厘四毫为实，以原米二十三石三斗六升为法除之。该银一两二钱九分。

---

[1] “曰”原书为“田”。
[2] “贱”原书为“贵”。
[3] “贵”原书为“贱”。
[4] “银”原书为“米”。

在此例中，柯尚迁给出了两种解法，相当于运用了等式：a÷b×c=a×c÷b。此类型的题在《九章算法》中属于衰分章，并不属粟米章。

[例 2]同乘同除法

原粟五米换稻六斗，原稻五斗换米二升，原米二斗四升换糯米二斗二升，今糯米五斗，该换粟若干？

先置原粟五斗，以原稻五斗乘之得二十五斗，又以原米二斗四升乘之得六十斗，又以今糯米五斗乘之得三百斗为实。置所换稻六斗，以所换米二斗乘之得十二斗，又以折换糯米二斗一升乘之得二十五斗二升为法，除前三百斗见粟数。该换粟一石一斗九升四勺七抄六撮不尽。

在此例中，柯尚迁运用了 $a \cdot \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} = \frac{a \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3}$，由上例和本例可知，柯尚迁已自觉地运用乘除法混合运算的性质。

第三节为“三曰差分（古作衰分，以御贵贱廪税）”。柯尚迁在节首“古法”和唐顺之对“差分”的释义，

古法曰：各列置衰（各自排列所求等法多寡之位），列相与率也（有分者率，无分者非）重则可约（数重叠者以约分法约之，位简而易求分。不重者勿问），副并为法（并列襄之数也），以所分乘未并者各自为列实，以法除之。不满法者，以法命之（以法命实数，可约者约之。古人谓衰等位繁，故立此分法也）。

唐氏曰：差分、方程、盈朒、粟米总是一分法也。物有多寡，价有贵贱，两物相形，已知物之孰贵孰贱，各有定价矣。若使两物总共若干两，价总共若干，则两物混杂而总价固相差也，于是以价权物，则因价之贵贱而差分也。

《九章算术》衰分章“衰分术”为：

衰分术曰：各置列衰，副并为法。以所分乘未并者，各自为实。实如法而一，不满法者，以法命之。

可以看出，《数学通轨》本节引用的“古法”与《九章算术》的“衰分术”大体相同。《九章算术》衰分章主要论述比例分配，兼论其它的比例问题。唐顺之则认为应该差分、方程、盈朒、粟米等内容统一起来。柯尚迁采用了唐顺之的观点，这在本节的例题中有所表现。

在本节中，差分问题的解法分成三类：二等贵贱差分法、三等差分法和四等

差分法。

1、二等贵贱差分法

柯尚迁首先用歌诀给出了二等贵贱差分问题的解法：

二等贵贱差分法歌曰：

差分贵贱与实乘，乘数将来减总真

另将贵贱减为法，除后各乘各数明

柯尚迁随之举了两例。今录第一例如下：

例：稻麦共一千石，总价一百六十八两一钱四分七厘一毫[①]每稻一石价银一钱七分二厘，每麦一石价银一钱四分五厘，该稻麦若干？各该银若干？

先置稻麦一千石，以贵价一钱七分二厘乘之得一百七十二两，内减总价一百六十八两一钱四分七厘一毫，余三两八钱五分二厘九毫为实，另置稻价一钱七分二厘，内减去麦贱价一钱四分五厘，余二分七厘为法，除前余银见麦数。除得麦一百四十二石七斗，却以麦价乘之，该麦银二十两六钱九分一厘五毫，又以稻麦一千石内减去麦一百四十二石七斗，余为稻数，该稻八百五十七石三斗，却以稻价乘之，该稻银一百四十七两四钱五分。

本例现代通常用下面二元一次方程组来解：

设 x 石为稻数，y 石为麦数，依题意可得：

$$\begin{cases} x+y=1000 & (1) \\ 0.172x+0.145y=168.1471 & (2) \end{cases}$$

我们用加减消元法解此题：

（1）×0.172 得：0.172x+0.172y=172　　　(3)

（3）—（2）得:0.027y=3.8529　　所以 y=142.7，把 y=142.7 代入（1）求得 x=857.3。

所以 $\begin{cases} x=857.3 \\ y=142.7 \end{cases}$

可以看出，柯尚迁对本例的解题过程与现代的加减消元法几乎完全相同。

在《九章算术》中，与本例同类型的题目并没有在衰分章出现，在盈不足章中倒有数例：第 13 题、第 16 题、第 17 题等即是。

[①] “七”、“一”二字原书缺，今参照题下的解法补。

2、三等差分法

柯尚迁仅给出了此类问题及其解法的一个例子：

官粟四十七石九斗，派令将一半换米，一半换麦豆。每粟一斗换米六升二合，每粟一斗换豆七升三合，每粟八升换麦五升四合。该米豆麦若干？

先将粟四十七石九斗折半，得二十三石九斗五升，以米六升二合乘之。该米一十四石八斗四升九合。又将二十三石九斗五升折半，得一十一石九斗七升五合[①]。以豆七升三合乘之，该豆八石七斗四升一合七勺五抄，又将一十一石九斗七升五合为实，另以麦五升四合，以粟八升为法除之，得每粟一升该麦六合七勺五抄，却乘一十一石九斗七升五合麦数，该麦八石八升二合一勺二抄。又粟见麦法：将一十一石九斗七升五合以八归，归得一石四斗九升六合八勺七抄五撮，以麦五升四合乘之见麦数。

可以看出，柯尚迁此例虽为“三等差分法”，但在《九章算术》中，应属于“粟米”问题，不属 “衰分”问题。此题的题目出得不太严谨，题目中没有提到“等粟换麦豆”，但在解题时却用到了这一条件。

3、四等差分法

柯尚迁对此法也仅有一示例：

官银三十七两八钱九分，发买粟、豆、白米、黄米四色，粟每斗价银三分四厘，豆每斗价银二分五厘，白米每斗价银四分八厘（即稻粱），黄米每斗价银五分三厘，各该若干斗？各该若干银？

先将官银三十钱两八钱九分为实，以四色价银并之为法，共一钱六分除之，除得每色该二十三石六斗八升一合二勺五抄为则，却以各价乘之见得银数。粟价每斗三分四厘，以二十三石六斗八升一合二勺五抄乘之，该银八两五分一厘六毫二丝五忽……

可以看出，此例为一比例分配问题，在《九章算术》中，正好属于“衰分”问题。此例的题目出得不太严谨；在解题中用了“四色数相等”这个条件，但题目中并未给出。

第四节为“四曰少广（古注以御积幂方员）”。柯尚迁在本节节首给出了“少广”的两种释义。

[①] “五合”原书无。

古注曰：一亩之田，广一步，长二百四十步，今截纵步以益广，故曰少广（按九数之名，传自三代。亩二百四十步，汉乃有之，今如此解，去之远矣，古注皆不足信，此可证也。惟本注曰以御积幂[①]方员，差可信。盖积幂如仓庾也，方员仓庾之方员，言五少约算广大也。）

今注曰：积米其中，外面遮蔽方圆，以其器而知多少也，又如看船上装载货物，用锥探其深浅，便知其多少也。如方器如何算，圆器如何算，各有法，故名少广。

《九章算术》少广章论述从面积、体积反算其边长、周长和直径等问题。《数学通轨》本节与《九章算术》少广章有很大的不同，柯尚迁在本节中主要讨论了各种立体的体积计算问题，这些问题在《九章算术》商功章才涉及。

随后，柯尚迁在“斛法”中给出了石与立方尺之间的换算关系：

每直一尺，横一尺，高二尺五寸为一石。故用斛法者，用二五归除也。如不用二五归除用四因代之甚捷[②]。凡量仓积须斛与尺较定，分毫不差，量积方准。若斛大而尺短，积数定多；斛小而尺长，积数定少。

柯尚迁定“斛法”为：一石=2.5立方尺。

“斛法”之后，是本节的中心部分，柯尚迁在此指出了方仓、圆仓、圆台、尖堆、倚壁、外角、船等若干立体的体积计算的方法。《数学通轨》给出的计算公式与《盘珠算法》的同种立体的计算公式相同，但《数学通轨》没有外角、方台的体积计算公式。可以看出，《数学通轨》体积计算的成就稍逊于《盘珠算法》。

在本节最后的“尖垛法”中，柯尚迁以一实例指出了算术级数$\sum_{i=1}^{n} i$的计算方法：

稻包一堆，脚下二十四个，每一层少一个，直至尖一个止。该稻包若干？

先将二十四个为实，又以二十四个再加一个，作二十五个为法，乘之得六百包，再用五因折半。该稻包三百个。

可以看出《数学通轨》对此例的解法是正确的。此例在《盘珠算法》中也已经出现过。

第五节为“五曰商功（本注以御功程积实）”。柯尚迁在节首引用了“古注”对“商功”的释义：

---

① “幂”原书为“幕”。原书他处的“幂”都被误为“幕”，在本文的引文中我们都已作订正。

② “捷”原书为“截”。

古注：求积法用乘除，题以物数求积之法，以象而立积者，方之实，周径高阔深长者，方之法。员余曲直皆类。其方益其虚而张其积；折其积而凑其方。此商务筑积之要也。其量土与积米，求积用法，则若缸瓜果求个。用法稍异何者？其形虽似，而高层或有不齐，虚实并存，有削类其形不同其法也。

柯尚迁感到此注费解，在其后加了一句："此注不通"。随之，他写下了"今注"对"商功"释义：

今注曰：商功，商其功程。如打土论方子，打算一方土，便会计得合用几多人工。如做屋，亦可打算几间、几深，合用几多人工之类。（此解浅明）。

应该说，柯尚迁对"商功"的理解符合《九章算术》原意。但在具体内容上，本节与《九章算术》商功章有很大的区别。《九章算术》商功章讨论土方体积、粮仓体积以及计算劳动人力数等问题，而柯尚迁在本节讨论酬劳计算问题。请看柯尚迁的示例：

[例 1]量土方数法（凡土横直各一丈，深一尺为一方）

中层：直六十丈，横五十丈，深一尺二寸。

中层：直五十八丈，横四十五丈，深九寸。

下层：直五十五丈，横四十五丈，深八寸。

先将上层横直相乘，又以深乘，该土三千六百方；次将中层横直相乘，又以深乘，该土二千五百零五方六尺；次将下层横直相乘，又以深乘，该土一千九百八十方。三乘总并，该土八千零八十五方六尺。

土工挑土八千八十五方六尺，每土六方三尺，工银一钱，总共工若干？该工银若干？

置八千八十五方六尺为实，以六方三尺归除之。

该工银一百二十八两三钱四分二厘八毫。

依题意，一方=100 立方尺。柯尚迁在计算中层土方时不严谨，中层土方应为"二千五百零五方六十尺"，不是柯尚迁的"二千五百零五方六尺"。除此之外，题中的"每土六方三尺"应为"每土六方三十尺"。柯尚迁认为 1 方=10 尺是错误的。

按《九章算术》的体例，本例虽然是酬劳计算，但大体上也可以属于"商功"问题。其它三例虽也为酬劳计算问题，但绝不是"商功"问题。

[例2]今有四人来做工八日，工价银九钱，二十四人做半月，试问工钱该几分？答曰：一十两一钱二分五厘。

法曰：置人二十四，以作工十五日乘之得三百六十，又以银九钱因之得三百二十四两为实，以人四乘八日[①]得三十二为法，除之合问。

[例3]原雇工人挑八十斤，行路一百里，脚银六分，今挑一百五十斤，行路四百里，总该脚价银若干？

先置脚银六分，以八十为法除之，得每十斤该银七厘五毫为实，又以四百里乘之，此正法也。今变先乘后除法于下：先置一百五十斤，以脚银六分乘之，该脚银九分，又以四百里乘之，该脚银三钱六分为实，却以八十斤为法除之。总该脚价银四钱五分。

此两例为复比例问题，在《九章算术》中都属于"衰分"或"均输"问题。《九章算术》均输章中的第7、第8等题与此两例同类。

[例4]诸葛营中赏战军，辕门听得各分银。每人赏他三两五，却又多了六两银；每人赏他三两三，又多二两八钱银。请问世间高算手，几多银数几多军？

先以每人三两五钱内除每人三两三钱为二归法，另以多银六两内除多银二两八钱，余三两二钱，以二归归之得一两六钱，即十六军[②]为实，即以每人三两五钱乘之得五十六两，内除所多六两，该五十两。若以每人三两三钱乘之得五十二两八钱，内除二两八钱，亦是五十两，该军一十六名，共该赏银五十两。

本例是一诗题，是一盈不足问题，放在本节显然不合适。另外本题出错了，题和解中的"多"字都应为"差"字。

第六节为"六曰均输（本注以御远近劳费）"。柯尚迁首先在节首引用了"古注"对"均输"释义。

古注法曰：所输粟价等物贵贱地里高下，远近，人户多寡。均而为衰，如衰分法求之。

随后，他又加了"今注"对"均输"释义。

今注曰：均其道理，远近之劳与费。劳是力费，是裹足如自某处到某处，用力几何，及裹足几何之类。

《九章算术》均输章的问题很杂，是粟米章、衰分章有关的比例理论应用的

① "日"字原书为"百"
② "军"字原书为"运"。

进一步提高和发展。本节与《九章算术》的均输章内容大体相近。请看柯尚迁的本节例题：

[例 1]异除同除法

客一十五人，住居十二日，共食米三石六斗，每客一日食米若干？

先置三石六斗为实，以一十二日为法除之，得众客每一日共食米三斗为实，又以十五人为法除之，每客一人日食米二升。又法先以十五客乘十二日得一百八十日为法，却除三石六斗米数亦是。

在此例中，柯尚迁给出了两种解法，相当于运用了除法运算法则： $a\div b\div c=a\div(b\times c)$

[例 2]张骞当年去西域，计程十万零八千，每日常行七十五，问君去了几多年？

此题为一诗题，与《盘珠算法》的“唐僧取经”题和《算法统宗》第十六卷的“三藏取经”题从题目到解法几乎完全相同。

[例 3]鸿雁一日飞八百，快鹰一日飞一千，鸿雁先飞三个月，问君何日同到边？

先将三个月作为九十日，以八百里乘之，得七万二千里，却用二归见数，该三百六十日一同到边？

此题为一诗题，为行程问题中的追赶问题。《九章算术》均输章也出现过此类问题：第 12 题、第 13 题、第 14 题等即是。

[例 4]二十四马和驴，支米九斗更无余，马支五升驴支二，多少是马多少驴？

此例也为一诗题。按柯尚迁本人对九章的分类，此例应属于前面“差分”节中的“二等贵贱差分法”放在这里不合适的。此例的解法也与“二等贵贱差分法”中例题的解法相同。在此不再赘述。

[例 5]每人织锦一日，织得八尺二寸半，今五十二人织锦，共织二十七日，总该织锦若干？

先置五十六人为实，以八尺二寸半乘之见之丈数，又以二十七日乘之，总该织锦一千二百四十七丈四尺。又法：先以五十六人乘二十七日，见日数工数，又以八尺二寸半乘之见丈数。

此例为一双正比例问题，柯尚迁给出了两种解法，相当于运用了乘法的运算法则：$abc=acb$。

[例 6]一个公公不记年，手持节杖在门前，一两八钱泥丸子，每岁盘中放一

丸，忽然一日遭雨烂，尽在盘中化一团。总计八斤半，算此公公几多年？

此题为一诗题。《盘珠算法》中“公公不记年”题、《算法统宗》卷十三的“老人问甲歌”题与此题从题目到解法几乎完全相同。此题在《盘珠算法》中已经讨论，在此不再赘述。

第七节为“七曰盈朒（本注以御隐互见）”。柯尚迁首先在节首引用了《九章算术》对“盈朒”问题的解法。

古注法曰：置所出率盈与不足各居其下。令雅寻以所出率，并以为实，并盈不足为法。实如法而一。有分者，通之。盈不足相与同其物者，置位置所出率，以少减多，余以约法、实物价为实，人数为法。

（《九章算术》的“盈不足术”为：

盈不足术曰；置所出率盈、不足各居其下，令维乘所出率，并以为实，并盈、不足为法。实如法而一。有分者，通之。盈不足相与同其买物者，置所出率，以少减多，余，以约、法。实为物价，法为人数。

随之，柯尚迁以“今注”与“古注”相对比。

今注：盈是多，朒是少，数之显者可见，隐者不可见，至于杂，则不可见，由其显以推其隐。如人有财物，失一半或少半或大半。失物者，道多无可考究。隐杂互见，是因其所存，以验其所失之多少也。

《九章算术》盈不足章讨论了在非负数范围内用双假设法解一元一次方程问题。看来，柯尚迁对“盈朒”的理解已大大偏离了《九章算术》的原意。为了使自己的观点更可信，柯尚迁随之引用了唐顺之对“盈朒”的释义。

唐氏曰：差分、方程之所不能尽，于是有盈朒焉。盈者有余，朒朒者不足。盈朒者，因其外露畸零可见之数，而推知其中藏隐杂不可见之数，以据末颖而穷全锥也。假令物共若干两，价共若干两，两物混杂，而法有不尽于差分也，于是有盈朒之。假令总是贵物，则原总价不足若干，总是贱物，则原总价有余若干，于是推乘以齐其数，以不足之数乘贱物，以有余之数乘贵物，两物各得其所，乘之数以为实，而并其有余不足之数以为法，而各归之，则物之多寡得矣，此差分之盈朒也。未知两物之孰贵孰贱，而但知此三而彼立，则价共曾若干，此五而彼三，则价共减若干，两价混杂而法有不尽于方程也，于是而盈朒之。假令此贱若干，彼贵若干，则原总价有余几何；此贵若干，彼贱若干，则原总价不足几何，

于是而惟乘以齐其数。以有余乘此贵彼贱，亦以不足乘以贵彼[1]贱，令两贱自相减一为实，有余不足亦自相减为法，则价之贵贱可得矣。此方程之盈朒也。差分以价权物，方程以物权价。差分露价而混物，方程露物而混价。露价而混物，故以价而相辖；露物而混价，故以物相参。而盈朒通乎其间也，故盈朒者，差分、方程之所不能尽者也。

唐氏的“差分之盈朒”相当于解方程组 $\begin{cases} x+y=a \\ cx+dy=b \end{cases}$

其中，c，d 为两物的单价，x，y 为两物个数。

“方程之盈朒”相当于解方程组：$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$

其中 a_{11}，a_{21} 为一物的个数，a_{12}，a_{22} 为另一物的个数，x，y 分别为两物的单价。

在“差分”节中，我们已经知道，唐顺之想把差分，盈朒、方程统一起来，在这里，唐顺之给出了统一方案：用盈朒把差分、方程统一起来。看来，唐顺之对“盈朒”意义的理解远远超出了《九章算术》的范围。

柯尚迁仅仅理解唐顺之“盈朒”的表层意义，对唐顺之“盈朒”的本意几乎全然无知，在本节示例中，他给出的例题为复比例问题和比例分配问题。

例 1：异乘同除

夏布四十五换棉布，每夏布三共价二钱，每棉布七匹共价七钱五分，该棉布若干。

柯尚迁给出了此例的两种解法：

解法一：[45×（2÷3）]÷（7.5÷7）

解法二：（45×2×7）÷（3×7.5）

柯尚迁认为解法二胜于解法一的地方是解法一先用除，导致除不尽早早出现。柯尚迁没有用分数参与计算，对于“除不尽”感到很棘手。

例 2：同乘同除

原鹅八只换鸭二十只，原鸭三十只换鸡九十只，原鸡六十只换猪二只，今有猪五只，该换鹅若干？

此例与本书第二部分“粟米”的“同乘同除法”例题类同，解法也相一致，

[1] “彼”原书为“比”。

在此不再赘述。

在解完此题后，柯尚迁对两种解法作了评述："从下起算至上，或一乘一除、或总乘总除。庶畸零之数置于末后，便见盈朒之意也"。看来，这就是柯尚迁所谓"盈朒"的一意：对于乘除混合算式，为了防止除不尽首先出现，用乘法先算总实和总法，再算总法除总实，得到最终结果。(参见"粟米"节部分)

例 3：官米七十二石九斗六升，令三等人户出纳，下等六十四户，每户纳米一分；中等四十户，每户纳米三分；上等二十四户，每户纳米五分. 各等户该纳若干？

柯尚迁对此例给出了相当于如下的解法：

下等户每户：$\dfrac{72.96}{64+40\times3+24\times5}=0.24$， 总：$\dfrac{72.96}{64+40\times3+24\times5}\times64$

中等户每户：$\dfrac{72.96}{64+40\times3+24\times5}\times3=0.72$， 总：$\dfrac{72.96}{64+40\times3+24\times5}\times3\times40$

上等户每户：0.24×5 ，总：1.2×24。

柯尚迁认为此题为"差分盈朒"。

例 4：八马九牛十四羊，放在村南牧草场，吃了人家一圈，议定共赔六石粮，牛二只比羊一只，四马二牛可赔偿[1]（羊比牛多一倍，马比牛多一倍）. 请问世间高算手，羊马各有几多粮？

此题为一诗题，柯尚迁给出了相当于如下解法：

一羊应赔：$\dfrac{600}{14+9\times2+8\times4}=9.375$ 升

羊主应赔：9.375×14=131.25 升=131.25 石

马主应赔：9.375×32=300 升=3 石

牛主应赔：9.375×18=168.75 升=1.6875 石。

柯尚迁认为此题为"方程盈朒"。

在例 3、例 4 中，柯尚迁给出的解法中没有出现小数。为了方便，我们把"九升三合七勺五抄"等表示成了相应的小数 "9.375 升"等。

第八节为"八曰方程（本注以御错杂正负）"。柯尚迁在节首首先引用了"古注"和唐顺之对"方程"的释义：

[1] "牛二只比羊一只，四马二牛可赔偿" 应为"牛一只比羊二只，二马四牛可赔偿"。

古注曰：方为科数之形也，程者量度总名，亦权衡丈尺斛斗之平法也，尤课分明多寡之义，以诸物总并为同其法，减损求原为主。公一存一以考其数。如甲乙行列诸物与价，先与甲行首位遍寻其乙，复以乙行首位遍寻其甲，求其有等，用少减多，以简其位。是去其物减其价钱为实，物为法。一法一实得数，并以商除之行位，繁者次第求之。同减异加，异减同加。正无正入之，负无负入之，所谓正者正数也；负者，欠数也。使学者参题取用依法布算。

唐氏曰：未知两物之孰贵孰贱，而但知两物叁伍之总价，若使此三而彼五，则价共增若干，此五而彼三，则价共减若干。于是两价混杂而物固相形也，该田若干之类，此俱是物也，应用除法。凡前后俱是很银或前后俱是物，悉如此例（谓之方程）。

又或遇总物、总银俱置盘内。如总物内欲穷一石或一亩或一人之类，要见银若干？就以总银为实，总物为法，除之。如总银欲求一两或一钱，要见物若干，就以总物为实，总银为法，除之，此一为银数，一为物数，难类乘法，然是分数，故用除法。

柯尚迁虽然引用了他处“方程”的若干释义，但他本人并不理解“方程”的实质。《九章算术》方程章主要讨论了多元一次方程组的解法，柯尚迁在本节中以“除法例”和“乘法例”对“方程”的进一步说明大大偏离了《九章算术》“方程”的原意。

柯尚迁在“除法例”中指出了在实际生活中，用除法计算的情形，并对此作了归纳。

除法例（程者，物价与银数各有定式而不可乱，今以“除法例”、“乘法例”列之，使见方程之法之实）。

凡遇前为银之实数，后为银之价；或前为物之实数，后为的之价，应用除法。如银一两五钱，五稻价银二钱四分买稻一石，此银数、银价俱是银也。……又如秋粮四石五斗，每亩两五钱，买稻，稻价四石五半。此一为银数一为物价，又如八两七钱买花，花价九十五斤，此一为银数，一为物价，故并用乘法，凡一银数，一为物价，悉如此例。

柯尚迁在“乘法例”中指出了在实际生活中，用乘法计算的情形。

乘法例

凡遇前为银之实数，后为物之价：或遇前为物之实数，后为银之价，应用乘法，如银一杂，而物数固相表也。于是以物权价，则因物之叁伍而推出价之贵贱，谓之方程，方程者，物价相检括，有定式而不可乱也。

在本节最后的“棉花求银法”和“银求棉花法”中，柯尚迁各举一实例：前例为“除法例”，后例为“乘法例”。

棉花求银法

每花十二斤半，卖银一钱，如花八百三十八斤十两，共该银若干？

银求棉花法（此一为银数，一为物价）

每银一钱，买花九斤半，如银六两七钱一分，该花若干？

在第二例后，柯尚迁加了一则按语：

凡物用秤称者，未乘之先，发斤下有两，俱要除六，乘除已后，如斤下有两，俱要加六至斤而止。庶其数不差。……

柯尚迁认为对于复名数斤两（如几斤几两）的计算，在计算之前，对两（几两）要“除六”，这里的除六现指除以16，在计算完毕之后，对计算结果中斤后面的两，要“加六”，这里的“加六”现指乘以16。这段按语的实质内容是先把复名数斤两化成单名数，计算完毕后，又把单名数化成复名数。柯尚迁在这里不自觉地使用了小数。

第九节为“九曰勾股（左注以御高深广远）”。柯尚迁首先在节首给出了“今注”和“古注”对“勾股”释义。

今注：横为勾，直为股，斜为弦。三者可互相求也。以勾中所容方直之积求之，则山之高、井这深，城邑之广、道途之远可以测知。此算术之极致也。

古注：求弦法曰：勾股各自乘，并而开方除之（以一勾一股幂以弦积相等，故并而开方除之）。弦求股法曰：勾自乘，以减弦自乘，余开方除之。（弦自乘内有一勾积，一股积，今法减去，余是股积，知股数）。弦求勾法曰；股自乘以减弦自乘，余开方除之（弦自乘中有一勾积，一股积。以股减弦，余即勾实，故开平方法除[①]之。

《九章算术》勾股章 “勾股术”为：

勾股术曰：勾股自乘，并而开方除之，即弦;，又，股自乘，以减弦自乘，

[①] “除”原书为“乘”。

其余开方除之，即勾，又，勾自乘，以减弦自乘，其余开方除之，即股。

可以看出：这里的“古注”与《九章算术》勾股章 “勾股术”文字基本相同，法义也完全一样。

在“古注”之后，柯尚迁给出了3个用勾股定理进行勾股弦互求的例子。

勾八尺，股，十五尺，为弦几何？答曰：十七尺。

弦十七步，勾八步，为股几何？答曰：十五步。

股十五尺，弦十七尺，为勾几何？答曰：八尺。

上述三题，柯尚迁给出的解法完全正确。在三例之后，柯尚迁引用了唐顺之对“勾股”的释义。

唐氏曰：勾股，所谓矩也。古人执数寸之矩，而日月运行朓朒迟速之变。山谷之高深广远。凡目力所及，无不可知者，盖不能逃乎数也。

勾股之法，横为勾，纵为股，斜为弦。勾股求弦，勾股自乘，相并为实，平方开之得弦。弦股求勾同法。盖股[1]弦实藏一勾一股之实，一勾一股之实并得一弦实也。数非两不行，因勾股而得弦，因股弦而得勾，因勾弦而得股。三者之中，其两者显可知，其一者藏而不可知。因两以得三，此勾股之法可通者。

至如远近可知，而高下不可知，如卑则塔影高，则日影之类。塔影之在地者，可量，而人足可以至，至于戴日之下，而日与塔高低之数不可知，则是有勾而无股弦，三者缺其二数，不可起，而勾股之法穷矣。于是有立表之法：盖以小勾股求大勾股也。小勾股每一寸之勾，为股长几何，则大勾股每一尺之勾，其长几何可知矣，此以人目与表与所望之高，三者相直，而知之也，人目至表，小弦也；目至所望之高，大弦也，又法表为小股，其高几何？与至塔下之数相乘，以小勾除之则塔高盖横之则为小股，至塔之积纵之则为小勾，至塔顶之积，纵横之数恰同是变勾为股，因横而得纵也，勾、股、弦三者有一可知，则立表之法可得，若其高与远之数皆不可知，而但目力可及，如隔海望山之类则勾股弦三者无一可知，而立表之法又穷矣，于是有重表之法，盖两表相去几何，为影差者几何，因其差以求勾股；亦可得矣。

故立表者以通勾股之穷也，重表者以通一表之穷也，其实，重表，一表也；一表，勾股也，无二法也。

---

[1] 原书的“股”似乎是多余的。

唐顺之认为“勾股”用来解决长度（高深广远）测量方面的问题，其法有三种：

其一为勾股弦互求，即勾股弦三者已知其二，运用勾股定理，求其一。

其二为单表测望术；利用相似直角三形角对应边成比例的性质进行测量。

其三为重表测望术，即重差术。刘徽的《海岛算经》是“算经十书”中系统讨论重差术的专著。

在引述唐顺之的“勾股”释义之后，柯尚迁又给出了三道较复杂的“勾股”题。

[例 1]度影量高法

度影量高法实奇，别量一丈影相随；

将其竿影为前实，丈影因乘可见之。

先置木影长五丈为实，另立一丈竿影长一丈二尺五寸为法乘之。该木高六丈二尺五寸。

从“度影量高法”和柯尚迁的示例可以看出，柯尚迁运用了单表测望术物高，并给出了物高公式：$H=l \cdot h$，其中 H 为被测物高，l 为被测物影长，h 为傍立一丈竿的影长。显然，柯尚迁给出的物高公式是错误的，应为 $H=l/h$，在上例中，木高应为 5/1.25=4 丈，不是 6.25 丈。

[例 2]厅门一座，高广难知，长竿横进门，狭四尺，竖进过去，亦长二尺，两隅斜去，恰好方齐，请问三色各该有几?

柯尚迁对此例给出了如下的解法：

门广$=\sqrt{2\times4\times2}+2=6$

门高$=\sqrt{2\times4\times2}+4=6$

竿长$=\sqrt{6^2+8^2}=10$

本题相当于问题：直角三角形三边分别为 a、b、c，c 为斜边，(c-a)、(c-b)为已知，求此直角三角形的三边。柯尚迁给出的解法相当于运用了下面三个公式：

$a=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-b)$，$b=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)$，$c=\sqrt{a^2+b^2}$

这三个公式是正确的，但柯尚迁仅给出公式，并没有给出算理。《九章算术》勾股章的第 12 题与本题完全同类。《九章算术》也给出了正确的解法。对本题，刘徽在《九章算术》注中已经给出了算理，其中包含了出入相补原理。

[例 3]八尺为股六尺勾，内容圆径怎生求，有人识得如斯妙，算举堪为第一筹。

此题为一诗题，相当于问题：已知直角三角形的两直角边分别为 8 和 6，求此直角三角形内切圆的直径。

对本题，柯尚迁给出的解法为：内切圆径 $d=\frac{2\times6\times8}{6+8+\sqrt{6^2+8^2}}=4$ 尺。

设直角三角形的两直角边为 a，b，内切圆的直径为 d，柯尚迁给出的解法相当于运用了公式 $d=\frac{2ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$。

此解法是正确的，但柯尚迁并未给出算理。《九章算术》勾股章第 16 题与此题同类，也给出了同样的公式，刘徽在注中给出算理，其中也包含了出入相补原理。

在本节最后，柯尚迁考证了土圭、勾股、罗经三种测望仪器的起源，认为三物“并出周公”，也考证了九数，认为“九数之名，出于保氏，始于方田、终于勾股”，在引用了唐顺之的对“勾股”的论述之后，柯尚迁感到《测圆海镜》一书价值重大，随之录有《测圆海镜》的“总率名号谱”，并绘有相应的“勾股弦容方圆图”。

《测圆海镜》总率名号谱

天之地为通弦，天这乾为通股，乾之地为通勾。

天之川为边弦、天之西边为股，西之川为边勾。

……

川之地为下平弦，川之夕为下平股，夕之地为下勾。

以上我们详细地介绍了《数学通轨》第三章“九章释例”。“九章释例”分成九节，九节的名称和排列顺序与《九章算术》的九章的名称和排列顺序完全相同。“九章释例”每节的“古注”也有数个与《九章算术》每章的本“术”也基本相同。因此，柯尚迁在写作“九章释例”时，一定参考了某种版本的《九章算术》，或某种包含有《九章算术》基本内容的数学著作。

“九章释例”虽参照了《九章算术》的章节结构，但与《九章算术》相比，水平实在是差得太远，“九章释例”中没有分数运算，没有开方运算。虽有“盈朒”、“方程”等节名，但其内容名不符实，因此，可以说柯尚迁只是非常粗浅地

理解《九章算术》，并未深入到其堂奥。

六、《数学通轨》数学思想简析

柯尚迁是一位下层知识分子，其数学著作《数学通轨》一方面反映了明代民间数学的特征，另一方面也反映了明代文人数学的思想趣向。

1、《数学通轨》的民间化数学特征

（1）歌诀化

柯尚迁在《数学通轨》中也使用了一些歌诀，如“因法”、“乘法”、“定身除法”、“归除法”等表现算法的歌诀，“二等贵贱差分法”等表现解法的歌诀，此外还有数首诗题。

歌诀化是明代数学民间性的重要表现，对此，在本章的“盘珠算法”节中有关部分已经作了详细的讨论，在此不再详述。

（2）实用化

与人们的实践活动紧密相联系是中国传统数学的特色之一。这在明代尤甚，《数学通轨》也不例外，对此我们已在本章的“盘珠算法”节中已有详细讨论，在此不再赘述。

2、《数学通轨》的文人数学趣向

《数学通轨》虽表现出民间数学的某些特征，但民间化并不是其数学思想的主流。《数学通轨》书首有序。书末第四章“九章总义”分为三节：“箬溪顾尚书《测圆海镜》序论”，“荆川唐太史六分论”和“荆川唐太史答顾尚书书”，收录着当时的数学领袖顾应祥和唐顺之的某些言论。

顾应祥，字箬溪，吴兴人。明嘉靖年间任云南巡抚，后升任刑部尚书。顾应祥嘉靖十二年（1533）年，著有《勾股算术》二卷；嘉靖二十九年，著有《测圆海镜分类释术》十卷；嘉靖三十二年，著有《测圆算术》四卷。其中《测圆海镜分类释义》和《弧矢算术》被《四库全书》所收录。

唐顺之（1507—1560），字应德，号荆川，武进人。嘉靖八年（1529）进士，官至右都御史。唐顺之著有《荆川先生文集》，通晓回回术法，精于弧矢割圆术。其数学著作《勾股弧矢论略》，《勾股六论》一卷均收在《荆川先生文集》之内。

顾应祥、唐顺之两人都为高官，柯尚迁把他们的言论收入自己的著作之中，

由此可见了二人对柯尚迁的影响之深，顾、唐、柯三人虽然社会地位悬殊，但都属于文人。在《数学通轨》中，我们可以管窥文人数学的思想趣向。

（1）数的阴阳观

阴阳学说是我国传统重要的自然哲学思想之一。老子云："万物负阴而抱阳，冲气以为和"。这表明我们的先民很早就用阴阳思想解释宇宙的万事万物。到了明代，许多文人数学家们继续用阴阳学说对宇宙间事物及其变化规律做出哲学的概括，包括也为数学寻找阴阳依据。柯尚迁在《数学通轨·叙》中认为。

天地之始一气而已，气之运动而自然者为理，有气而后有象，有象而后有数。

柯尚迁认为世界的本原为气，世界的规律（即理）是在物质的运动中体现出来。"气"与"数"以"象"为中介联系起来，对于气的特征，柯尚迁在《数学通轨·序》中进一步阐释：

气，不外乎阴阳，一阖一辟之变而已，阖则为聚，辟则为散。

柯尚迁认为气分阴阳。阖辟为气的基本特性，对阴阳思想，顾应祥和唐顺之二人早在柯尚迁之前也有类似的阐发，如顾应祥认为：

天地之所以神变化而生万物者，阴阳而已。一阴一阳交互错综而变化无穷焉。[①]

以顾应祥看来，宇宙间万物的变化无穷都是由于阴阳之间的相生相克而造成的。

唐顺之在《荆川先生文集》（卷十七）也认为：

天地之间聚散为合而已，天气下降，地气上腾而天地合，天气上腾、地气下降而天地判。合则气发泄于其外，判则气凝结于其中，其分所以为合也。气[②]之用，聚散分合而已矣。[③]

唐顺之把气分为"天气"和"地气"，实质上也是阴阳，在"天气"与"地气"的升降沉浮中，天地之间的取散分合得以发生。

在建立了以阴阳学说为核心的本体论之后，柯、顾、唐三人以此为基础，用阴阳学说对数学的本质作阐释，如柯尚迁认为：

……气不外乎阴阳一阖一辟之变而已，阖则为聚，辟则为散，数之用，聚散分合而已，分则为除，散则为乘，一乘一除之所以妙乎造化也。

柯尚迁把乘除两种基本数学运算，归结为数的聚散分合，而这种聚散分合的

① 顾应祥.测圆海镜分类释术·序[M].1550.或参见：柯尚迁:数学通轨·九章总义[M].
② "气"原书为"无"。
③ 此段引文《数学通轨·九章总义》也有收录。

本质是阴阳的开合。

顾应祥也认为：

数之为术虽千变万化之不同，而其要不地一开一合而已。开者除也，合者乘也。古之为数者有九九者，其用也。

顾应祥所认为数学的方法技巧虽然千变万化，但万变不离其宗，其根源是阴阳的开合。“开”与除相应，“合”与乘相应，因此，乘除二种运算是最基本的数学技巧。

在数的阴阳学说之中，数是通阴阳之变的重要途径，因此，数的广泛应用性是自然的。对此，柯、唐、顾三人各有论述，如柯尚迁在《数学通轨·叙》中认为：

天之高，星辰之远，地之高深广狭皆不能逃乎数矣。

数之妙用虽可以穷天地，悉万物，其要务则初于人生日用而不可须臾舍也。凡人生世，不论贵贱，皆须二艺[1]主要以立身也。

以柯尚迁看来，数学不仅可以广泛地应用于日常生活之中，而且其高深之处可以用来测量天地星辰的高深广远，普通人应该通一点数学作为立身之需。

顾应祥则认为：

一阴一阳交互错综而变化无穷焉，圣人因其交互错综之不齐而置为数术以测之，于是天地之高深，日月之出没，鬼神之幽秘者皆可得知矣[2]。

顾应祥认为圣人为了通阴阳之变，认识世界的规律性而发明了数学，数学是通阴阳之变的工具，必然有多方面的应用。大的方面可以测量天地的高深，可以预言日月星辰的出没，小的方面的作用则更多：

以贸易，则为粟米用之；以分别差等，较远近，则为差分，为均输；因其未而欲之其本，则为盈朒；彼此互见，则为方程；若夫以形求积，则方田，商功之类是也；以积求形，则少广、勾股之类是也[3]。

唐顺之也有这样的观点：

分不分，谓之縻军；聚不聚，谓之孤旅。然聚易而分难，其分所以为聚也，韩信多多益辩，兵家以为分数明也。数之用聚散分合而已矣。聚小以为大，谓之

[1] 指书、数二艺。
[2] 转引自《数学通轨·九章总义》。
[3] 转引自《数学通轨·九章总义》。

乘，散大以为小，谓之除[1]。

唐顺之认为军队集中与分散是数的聚散分合的运用。

比较以上柯、顾、唐三人的观点可以看出，顾应祥的观点最为精辟。在顾应祥看来，他已经为数学的广泛应用性找到了一个坚实的形而上学基础。

（2）理学影响下的数学观

在明代，程朱理学业成为官方哲学，定为一尊。在明初，明太祖朱元璋和明成祖朱棣就大力提倡理学。规定朱熹所注释的《四书》、《五经》为八股取仕的考试的内容。明代的文人研究数学，在思想上打上了深深的理学烙印，在朱熹的理学中，"理"是最高的本体，万物的本源。朱熹认为理在气先，即理可以抛开具体的事物的存在而独立存在。因此，"理"具有令人不可捉摸的神秘性。如柯尚迁在《数学通轨》第一章"学算须知"的"数原"条中写道：

孔子曰：易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象立而三才具、五行运于其间矣。故天地之数，始于一，太极者，一也；太极生阴阳，阴阳者二也；阴阳生四象，而三才成。三才者，三也；四象者，四也；四象分为五行，而五数立矣。天地之道，定于五，为数之原，由是以天地相合生成之德，配为十，以立数之本，故天以一生水，须地以成之而六生焉。一与六配为水，合也。地以二生火，须天以成之而七生焉，二与七配为火，合也。天以三生木，须地以成之，而八生焉，三与八配为木，合也。地以四生金，须天以成之，而九生焉，四与九配为金，合也。天以五生土而地成之，则十生焉，五与土为土，合也，故又曰，天数五，地数五，五位相得而各有合，此自一至十之数所由肇也。

"数原"条，柯尚迁加有附注："古无，尚迁推补"。看来，柯尚迁认为这是自己的得意之作。柯尚迁用象数理论对"一""二"……"十"等十个数字的由来作了一个解释。在柯尚迁的解释中，象数学的基本术语如"太极"、"阴阳"、"三才"、"四象"、"五行"都用上了。

柯尚迁不仅用象数理论解释十个基本数字的由来，而且还解释大数的记法：

由此以为数本积而倍之，则十十为百，十百为千，十千为万，十万为亿，十亿为兆，十兆为京，十京为垓，十垓为秭。诗曰，万亿及秭是也，十秭为穰。诗曰：降福穰穰而复穰，则多不而可穷，故谓之极焉，故数始于太极而终于极。

[1] 转引自《数学通轨·九章总义》。

大数的最大单位为“极”，柯尚迁认为数始于太极而终于极，是非常圆满的。

对数后面形而上的“理”的追求在明代文人数学家中有一定的普遍性。在《数学通轨》的“九章总义”中，柯尚迁收录有一封唐顺之回顾应祥的信（“荆川唐太史答顾尚书书”）。信上写有：

《易》云：形而上为道，形而下为器。圣人虽是为性命、真机发此两语。其实，百氏技术、理数诸家之学，精微紧要悉在此矣。窃观明公演出《测圆海镜》书，自非明公细心绝识洞极神明之奥，则不能剖破此混沌也，敬服。然鄙见窃以为此书形而下之数太详，而形而上之义或略，使观之者尚不免有数可陈而义难知及，示人鸳鸯枕而不度人以金针之难，仆意明公于紧要处提掇一二，作法源头出来，庶使后世为数学者，识其大者得其义，识其小者得其数，则此书尤觉精末耳。

唐顺之认为李冶《测圆海镜》一书“形而下之数太详，而形而上之义或略。”实际上，顾应祥对《测圆海镜》的“形而下”已经看不懂了。顾应祥曾说：

(《测圆海镜》)虽专主于求容圆求方一术，然其中间如平方立方三乘方，带纵减纵，益廉减廉，正隅负隅诸法，凡所谓以积求诸形者，皆尽之矣。但其每条下细草，虽径立天元一，反复合之，而无下手之术，使后学之士，茫然无门可入。辄不自揆，每章去其细草[1]。

看来，顾应祥已经不懂天元术了。“形而下”还没有搞清楚，唐顺之却要顾应祥出示“形而上”之处。明代文人数学家追求数背后的神秘的“理”阻碍了数学理论的发展。明代人不愿研究数学理论的艰深之处，柯尚迁没有搞懂《九章算术》中的深奥部分，顾应祥、唐顺之也不想搞懂宋元数学的高深部分。对整个明代数学，对顾、唐二人，清代人阮元都作了批评：

略涉九九着，遇三乘方，便望洋兴叹。应祥于廉隅加减之故，反复推之，而无不合，其用功亦勤矣。然不解立天元术，故于正负开方论说，都不明晓。明代算学陵替，习之者鲜，虽好学深思如应祥，其所造终未能深入奥室。删去《海镜》细草一节，遂贻千古不知而作之讥，惜哉。[2]

顺之习回回历而不知最高，读《测圆海镜》而不知立天元术。凡所论述，亦只得其浅焉者耳。然明季士大夫率以空疏相尚……[3]

[1] 顾应祥.测圆海镜分类释术·序[M].1550
[2] 阮元.畴人传，卷三十[M].《续修四库全书》版
[3] 阮元.畴人传，卷三十[M].《续修四库全书》版

“在14世纪之后，我国数学却出现了停滞。”[①]这个问题的原因很复杂，但我们也可以从明代文人的数学思想的趣向中略见端倪。

[①] 郭金彬.为什么14世纪后我国数学停滞了[A].科学传统与文化[C].陕西科学技术出版社,1983.250-260

第五章　陈际新与《割圆密率捷法》

明清之际，我国数学发展比较缓慢，进入了调整时期。这个时期，优秀的数学著作为数不多，《割圆密率捷法》是其翘楚。在中国数学史上，《割圆密率捷法》一书是从常量、离散、有限数学走向变量、连续、无限数学的转折点[①]。可见，《割圆密率捷法》的地位是非常重要的。《割圆密率捷法》一书是由蒙古族数学家明安图构思，并进行了部分写作，但最终由其弟子福建人陈际新等人续成的一部作品。福建人在《割圆密率捷法》的成书过程中发挥了重要的作用。

第一节　西算在明末清初的传入

《割圆密率捷法》既继承了传统数学思想，又吸收了西方数学的某些成就和方法，在此基础上，有所发展和创新。确实，《割圆密率捷法》的成书与明末清初西算的输入是分不开的。利玛窦是明末来华的西方传教士的先驱者，他开辟了中西文化交流的新纪元。在介绍西算在明末的传入之前，我们首先简单回顾明代八闽数学（珠算除外）的情况。

明代的八闽数学和当时的整个华夏数学一样，也处于低潮时期。高水平的数学家和数学著作是没有的，能通数学的人寥若晨星。这些人中，福建稍有名气的有李文利、郑善夫、郑洪等人。

李文利，明音乐理论家。字乾遂，号雨（两）山，成化十六年（1480）举人，莆田人。官思南府教授，长于乐律。著作有：《大乐律吕考注》四卷和《大乐律吕元声》六卷：李文利撰；李元校补。收入《四库存目》。《大乐律吕元声》的水平是不高的。《四库总目》云："是书据《吕氏春秋》黄钟长三寸九分之说，驳司马迁黄钟长九寸之误，《明史·艺文志》又载黄积庆作《乐律管见》二卷，驳文利之误。"

郑善夫(1485～1523 年)，字继之，号少谷，闽县(今福州市区)人，明弘治十八年(1505 年)进士。诗人，书画家，天算学家。他著有《改历元疏》、《日宿例》、《时宿例》、《序数传》、《田制论》、《九章乘除法》、《九归法》

[①] 李迪.中国传统数学文献精选导读[C].武汉:湖北教育出版社,1999.465.

等历算著作。其中《改历元疏》《明史》有记载，《畴人传》也全文收录。据《明史》记载："十五年，礼部员外郎郑善夫言：日月交食，日食最为难测。盖月食分数，但论距交远近，别无四时加减，且月小暗虚大，八方所见皆同。若日为月所掩，则日大而月小，日上而月下，日远而月近。日行有四时之异，月行有九道之分。故南北殊观，时刻亦异。必须据地定表，因时求合。如正德九年八月辛卯日食，历官报食八分六十七秒，而闽、广之地，遂至食既。时刻分秒，安得而同？今宜按交食以更历元，时不报。清刻分秒，必使奇零剖析详尽。不然，积以岁月，躔离朓朒，又不合矣。"[①]

郑洪，宁德人，幼习算，曾重编九章算法。

以上我们简单回顾了明代八闽数学的情况。现在我们再回到明末西算的传入中来。

利玛窦（Matteo Ricci，1552—1610）字西泰，意大利人。在来华之前曾学习过神学，并曾师从名师克拉维斯（Clavius）学习数学，1577 年，请愿来华传教，航行五年，于 1582 年抵达澳门。利玛窦在华 28 年，行迹由广东北上，最后定居北京。1610 年在北京去世。利玛窦虽然没有到过福建，但却与不少福建的士大夫有过交往。据林金水考证：利玛窦在华交游的士大夫人数达 130 多名，其中福建籍官员和在福建任职的官员约占六分之一，其中不乏一些在明末社会有一定的地位和影响的官员和学者，如叶向高、李贽、黄景昉、张瑞图、曹学佺、谢肇淛、王肯堂、王应麟、张维枢等。他们或多或少地受到利玛窦的影响[②]。在上述诸人中，王肯堂曾向利玛窦学习过历算。

王肯堂，字宇泰，号顺（损）庵，万历十七年（1589 年）进士，选庶吉士，授检讨。吏部侍郎杨时乔荐南京行人司副，终福建参政。王肯堂是一位医学家，也通数学。《大西西泰利先生行迹》中说："太史王公顺庵者，博学多闻士也，尚来知利子东来意，然素有志于度数历法之学，乃先遣门下士张养默者，就利子受业。"[③]利玛窦说王肯堂"是北京翰林院一个著名哲学家，""住在南京附近的小城镇，离京约有 4 里的路程。他对中国数学作长期研究，要想探讨中国数学的传统风格没有成功。他想创立一种新的方法，但是徒劳的。最后他放弃努力，派他的

[①] 张廷玉.明史，卷三十一，志第七，历一[M].

[②] 林金水,谢必震.福建对外文化交流史[M].福州:福建教育出版社,1997.23.

[③] 大西西泰利先生行迹[M].陈垣本.引自：林金水,谢必震.福建对外文化交流史[M].福州:福建教育出版社,1997.23.

学生带着他写的推荐信，去找利玛窦。信中说收他的学生为学生，也就是收他本人为学生。”[①]

王肯堂将利玛窦的《交友论》、《二十五言》稍加删改，编入了《郁冈斋笔尘》。他说：“利君遗余《交友论》一编，有味哉！其言之也，病怀为这爽佑，胜枚生《七发》远矣。使其素熟于中土语言文字，当不止是，乃稍删润，著于编。”[②]《二十五言》在《郁冈斋笔尘》中作《近言》，“利君又贻余《近言》一篇，名浅近，而其旨深远矣。亦录数条，置之座名。”[③]王肯堂在此书中还吸收了利玛窦传入的天算知识，论证了利玛窦传授的日体大于地体，地体大于月体的理论。

1610 年，利玛窦于北京去世，万历皇帝厚葬利玛窦，在阜城门外二里沟赐给利玛窦一块地基二十亩，房屋三十八间的墓地。福建人时任宰相的叶向高为利玛窦获此殊荣起到了起关键作用。《大西西泰利先生行迹》中记载：“时有内宦言于相国叶文忠曰：诸远方来宾者，从古皆无赐葬，何独厚于利子，文忠公曰：子见从古来宾，其道德学问，其一如利子著乎？姑毋论其他，即其所译《几何原本》一书，即宜钦赐葬地矣。”叶向高认为利玛窦把《几何原本》介绍到中来，仅此一项，就功高至伟，就可享受御赐墓地的殊荣。看来，叶向高已经看到了《几何原本》一书的伟大价值。

和利玛窦先后来华传教士有罗明坚、麦安东、石芳栖、郭居静、苏如汉、龙华民、罗如望、庞迪峨、费奇观、王丰肃、林斐理、熊三拔、艾儒略、郭纳爵等人，其中龙华民、庞迪峨、熊三拔、艾儒略等人精通天算。在这精通天算的数人中，艾儒略在福建的影响最大。

艾儒略（Jules Aleni 1582—1649），意大利人，于万历四十一年（1613 年）来华，艾儒略曾在福建 25 年（1624—1649）年，足迹遍及福州、福清、莆田、仙游、永春、安溪、德化、泉州、漳州、南平、建瓯、崇安、建宁、泰宁、邵武及汀州等地，几乎遍及福建全省。他通过与各地各个阶层士大夫的交往，广泛传播基督教，同时介绍西方的科学文化。在福建传教期间，艾儒略著有《几何要法》（1631 年）和《西学答问》等著作介绍西方科学、数学和文化。

[①] 林金水.利玛窦和中国[M].北京:中国社会科学出版社,1996.211.
[②] 王肯堂.郁冈斋笔尘，第 3 册[M].转引自：林金水,谢必震. 福建对外文化交流史[M].福州:福建教育出版社,1997.230
[③] 王肯堂.郁冈斋笔尘，第 3 册[M].转引自：林金水,谢必震. 福建对外文化交流史[M].福州:福建教育出版社,1997.230

利玛窦、艾儒略等人来华的主要目的是为了传教，但他们也传入了一些近代西方数学知识，向当时处于沉闷状态的中国数学吹来了一股清风。

利玛窦等人输入西算最重要的工作是利玛窦与徐光启（1562—1633）合译《几何原本》、利玛窦与李之藻（1565—1630）合译《同文算指》和与徐光启等人编纂《崇祯历书》。在这里介绍一下曾在福建当过官的李之藻。

李之藻，字振之，又字我存，号凉庵居士，杭州仁和人。万历二十六年（1598）进士第二甲第五名，官南京工部员外郎。翌年（1599）到北京。1601 年，李之藻认识利玛窦，他与利玛窦合译有《浑盖通宪图说》二卷、《圆容较义》一卷、《同文算指》（《前编》二卷、《通编》八卷，《别编》一卷）等著作。徐光启因李之藻通天算，曾向朝庭举荐。崇祯二年（1629），朝庭下诏李之藻与徐光启同修历法。崇祯三年，李之藻去世。李之藻曾在福建当过官，1603 年，李之藻任福建学政，为乡试主考官。

《几何原本》的翻译是利玛窦等人输入西算的最大贡献。《几何原本》是古希腊数学家欧的几里得（Euclid）在总结前人的成果的基础上于公元前 3 世纪编写的。《几何原本》是古代数学最伟大的著作之一，它从定义、公理、公设发出，用一系列的定理的方式，把整个初等几何知识整理成一个逻辑严密的演绎体系。《几何原本》经过历代数学家的注释，对近代科学的兴起，产生了深远的影响。爱因斯坦认为，《几何原本》所代表的逻辑推理方法，再加上科学实验，是近代科学产生和发展的两个重要前提。因此，《几何原本》的近代意义不单单在数学方面，也是科学家们建立科学理论体系的重要的思想方法。《几何原本》对纠正我国传统数学重算不重证的倾向也起到了很大的作用。明安图、陈际新等人在《割圆密率捷法》一书中就多处用《几何原本》的几何知识来解决他们的问题。

《割圆密率捷法》用到的三角学知识也是明末输入的。1631 年，徐光启进呈《崇祯历书》[①]内有《大测》二卷、《割圆八线表》六卷、《测量全义》十卷和李天经序、汤若望著的《深天仪说》四卷（1636 年），这些书介绍了三角学的基础知识。如《测量全义》第七卷中记载有：

每弧、每角有八种线，曰正弦；曰正切线，曰正割线。曰矢，曰余弦，曰余

[①] 《崇祯历书》收入《四库全书》后改名为《新法算书》。其中《割圆八线表》缩为《八线表》二卷，其它《大测》、《测量全义》卷数未变。见：文渊阁四库全书(第 798－799 册)[Z].子部(九四-九五):天文算法类.台湾商务印书馆.

切线，曰余矢，并全数为九种。

在这段记载旁附有八线图。这八线与现今通行的三角函数有一定的区别。用现今的符号表示，这八线分别为：

设一弧的半径为r，所对圆心角为α，则正弦为$r \cdot \sin\alpha$，正切为$r \cdot tg\alpha$，正割为$r \cdot \sec\alpha$，正矢为$r \cdot vers\alpha = r(1-\cos\alpha)$，余弦为$r \cdot \cos\alpha$，余切为$r \cdot ctg\alpha$，余割为$r \cdot cosec\alpha$，余矢为$r \cdot covers\alpha = r(1-\sin\alpha)$，在这八种三角函数中，正矢和余矢今已不用。另外正弦、余弦等其它六种三角函数在当时不仅与角的大小有关，而且还与角所取弧的半径有关；今天，三角函数仅仅是角的函数。这是今天的三角函数与当时的“八线”最主要的区别。为了叙述方便，我们在本书中把当时的“八线”一律用现今的符号表示出来。

三角学的基本公式，《测量全义》十卷中记录较详，如：

$\sin\alpha \cdot cosec\alpha = 1 \quad \cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1 \quad tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sin^2\alpha + \cos^2 = 1 \quad tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \quad ctg^2\alpha + 1 = \cos ec^2\alpha$

$\sin\alpha = \sin(60^o + \alpha) - \sin(60^o - \alpha) \quad \sec\alpha = tg\alpha + tg(\dfrac{90^o - \alpha}{2})$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta} \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

此外，《测量全义》中还记载有半角的三角函数公式以及三角函数的和差化积公式等等。

在《测量全义》十卷中还给出了解三角形的常用定理和公式：如正弦定理、余弦定理、正切定理、半角定理等等。《测量全义》给出的三角公式许多在《大测》和《数理精蕴》中也有收录。

此外，《割圆密率捷法》还运用了西算中的代数学知识。代数学于清初输入，被称为“西洋借根法”，通常译为“阿尔热巴拉”，《东华录》译作“阿尔朱马尔”，梅毂成在《赤水遗珍》中译作“阿尔热八达”。梅毂成已经注意到“借根法”与

我国宋元数学中的“天元术”相同。代数学之祖是阿拉伯数学家阿尔·花拉子米（Al—Khowarizmi），他约于公元825年著有《还原与对消》。此书后传入欧洲，因此，欧洲人把代数学又称为“东来法”。我国宋元时期的代数学已经达到了很高水平，但在明清相当长的一段时间里，数学家们已却不懂得宋元时期的“天元术”和“四元术”。

利玛窦等人输入的西方数学对明代的八闽数学家也有影响，反对者和支持者各有其人。

反对者以魏浚为代表。魏浚，松溪人，著有《纬谭》。在《纬谭》中，他极力反对利玛窦等人传入的西算。《四库全书总目》对《纬谭》作了严厉的批评。《四库全书总目》云：“此书首题曰拙存斋笔录，而子目则曰纬谭，盖其札记之一种也。首论太一三式源委，次括元，次太阳斗建阴阳南北，次干支纳卦，次干支内藏，次五行十二变，次六合取义。皆引援质证，断以己意。中极诋利玛窦天论为荒唐，末又附记万历、天启时推步之讹，凡十三事。然观其以朔方交趾北极出地论中国据地之大小，则知度而不知里。又谓交趾二月初三日日未昏而新月乃在天心，与夫夜观北极在子分者，则其国当居正中。实非深知历法者也”。此外魏浚还撰有《易义古象通》。

支持者以罗明祖为代表。罗明祖，永安人，崇祯辛未(1831 年)进士，著有《太初历衍》。他用西人的每周360度代替我国传统的365.25度。这是值得注意的一种数学思想。

第二节 明安图、陈际新与《割圆密割圆密率捷法》的出版

1701年，法国传教士杜德美（P. Jarloux）来华，传入了3个无穷级数展开式，梅毂成把它们收录在《赤水遗珍》中，并称为三式为“西士杜德美法”。这三式为：

$$\pi d = d(3+\frac{3\cdot1^2}{4\cdot3!}+\frac{3\cdot1^2\cdot3^2}{4^2 5!}+\frac{3\cdot1^2\cdot3^2\cdot5^2}{4^3 7!}+\frac{3\cdot1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2}{4^4 9!}+\cdots)$$

$$\text{或}\ \pi = 3(1+\frac{1}{4\cdot3!}+\frac{1^2\cdot3^2}{4^2 5!}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{4^3 7!}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2}{4^4 9!}+\cdots) \qquad (i)$$

$$r\sin\frac{a}{r}=a-\frac{a^3}{3!r^2}+\frac{a^5}{5!r^4}-\frac{a^7}{7!r^6}+\cdots \qquad \text{(ii)}$$

$$rvers\frac{a}{r}=\frac{a^2}{2!r}-\frac{a^4}{4!r^3}+\frac{a^6}{6!r^5}-\frac{a^8}{8!r^7}+\cdots \qquad \text{(iii)}$$

在上述三式中，a 表示某角以顶点为圆心，以 r 为半径画弧，与角的两边相交，交点之间的弧长。

不难看出，(ii) 与 sinx 的幂级数展开式、(iii) 与 cosx 的幂级数展开式是等价的。sinx，cosx 的幂级数展开式最早由印度人于 1540 年以前建立。不仅如此，印度人甚至还在欧洲人之前发现了 arctgx 的幂级数展开式 $arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$ (-1<x≤1=及其特殊情况 $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$。[①]但印度人的发现对后来欧洲人的发现并未产生什么影响。杜德美传入的三式中的 (i) 式是牛顿于 1667 年创立的，(ii)、(iii) 式是格列高里 (J. Gregory) 独立创立并于 1676 年发表的。"杜氏三术"的传入，就引起了当时一些中国数学家的注意。但是杜德美并没有将公式的证明一同传入，为了弄清这些公式的证明，成了明安图写作《割圆密率捷法》[②]的动机。

明安图 (1692—1763?)，字静庵，蒙古正白旗人，清代著名的科学家，早年被选为官学生，在钦天监学习天文历算。康熙皇帝是中国历史上少有的懂得自然科学的君主，他向西方传教士学习过数学，并亲自向明安图等人授过课，《清史列传》说："诸生受学于圣祖仁皇帝，精奥异人。"陈际新在《割圆密率捷法》序中也说："钦天监监正明静庵先生自童年亲受数学于圣祖仁皇帝，至老不倦。"明安图于 1713 年毕业，留在钦天监工作，至 1759 年升任钦天监监正。明安图在天文历法、地图测绘、数学等方面都取得了很大的成就。

陈际新，字舜五，宛平生员，祖籍福建，官灵台郎，后任钦正监监正。陈际新著有《气候备考》一卷，曾与戴震等人编修《四库全书》的天算部分。今考，陈际新校有《四库全书》的《新仪象法要》、《革象新书》、《勾股矩测解原》、《庄氏算学》、《古今律历考》、《表度说》、《简平仪说》、《新法算书》、《测量法义》、《测量异同》、《勾股义》、《浑盖通宪图说》、《历体略》、《钦定仪象考成》、《晓庵

[①] John Stillwell. Mathematics and its history, second edition [M] Springer, 2002.172

[②] 本书引用的《割圆密率捷法》采用如下版本：浙江图书馆藏，清道光十九年石梁岑氏刻本的影印本.见：续修四库全书，子部，天文算法类，第 1045 册。

新法》、《中星谱》、《天步真原》、《天学会通》、《历算全书》、《大统历志》、《数学》、《张邱建算经》、《测圆海镜》、《弧矢算术》、《同文算指前篇》、《几何原本》、《几何论约》、《数学论》、《数度衍》、《勾股引蒙》等三十余部著作。此外，陈际新还和他的弟弟陈道新合撰《陈氏六书》十三卷。陈道新，字省斋，子陈坦，字履正，陈坦子陈启运，字翼之。《陈氏六书》由陈坦校订，陈启运集录，其数学部分有《勾股斜要》四卷、《数理摘要》四卷。目前《陈氏六书》于北京图书馆有藏本。

罗士琳在《续畴人传》为陈际新和明安图都立有传，在他们的传中，《续畴人传》用大量的篇幅介绍《割圆密率捷法》一书的内容，只用很少的篇幅介绍他们的生平。

为了弄清"杜氏三术"的推导过程，成了明安图写作《割圆密率捷法》一书的动机。陈际新在《割圆密率捷法》序中引用明安图的话说："圆径求周、弧背求弦求矢三法，本泰西杜氏德美所著，实古今所未有也。亟欲公诸同志，惜仅有其法，而未详其义，恐人有金针不度之疑。"明安图从 1730 年初开始写作，持续三十余年，但在病革之时，只有遗稿一帙，并未成书。明安图感到非常遗憾，他说："予积解有年，不能卒业"。随之，他命其门人陈际新、张良亭、儿子明新"续而成之"。陈际新、张良亭、明新等人相互讨论，并推步校录十余年，至甲午年（1774 年）才成书。

张良亭，张肱的字，宝应人，以诸生而博士任钦天监夏官正，后任户部主事，与陈际新齐名。

明新，字景臻，明安图季子。

可以看出，固然明安图为《割圆密率捷法》的写作做出了最重要的贡献，但陈际新等人的工作也是《割圆密率捷法》的成书所不可缺少的。

《割圆密率捷法》成书后并没有立即出版，为一位数学家收藏起来，一种说法，这人是张敦仁（1754—1834）[①]。它的抄本曾经流传开来。阮元家就藏有抄本一本，最初阮元并不知道作者为何人，因此《畴人传》未载[②]。1839 年，在《割圆密率捷法》成书后的 60 多年，罗士琳从他的老师戴简恪家将原本影抄下来，请石梁人岑建功校对出版。

[①] 李俨.明清算家的割圆术研究[J].科学,1927,第 12 卷(11).1487-1502.第 12 卷(12).1721-1766.1928,第 13 卷(1).53-102.第 13 卷(2).200-250。或参见：李俨.明清算家的割圆术研究[A].中算史论丛[C].李俨 钱宝琮科学史全集[Z].辽宁教育出版社,1998.254-484

[②]《割圆密率捷法》阮元序

岑氏刻本《割圆密率捷法》前有陈际新、阮元、岑建功三人的序，后有罗士琳的跋。岑氏刻本《割圆密率捷法》全书字体整齐大方，错漏之处极少，印制精良。可以看出，岑建功在《割圆密率捷法》出版的校对、刻板、印制等环节等都作了精心的处理。

《割圆密率捷法》全书分四卷，卷一为“步法”，卷二为“用法”，卷三为“法解上”，卷四为“法解下”。下面我们逐卷简要介绍《割圆密率捷法》的数学思想和方法。

第三节　“步法”概述

在卷一“步法”中，《割圆密率捷法》把原有的“杜氏三术”扩充到“杜氏九术”。“杜氏九术”是清代数学家项名达、董祐诚、朱鸿、张豸冠、徐有壬、戴煦、丁取忠、夏鸾翔等人对《割圆密率捷法》中九个公式的总称，实际上是不恰当的，但已经定俗成。在本文中，我们也把这九个公式继续称为“杜氏九术”。除了“杜氏九术”之外，卷一还给出了若干三角恒等式。中国传统数学没有系统的符号代数学，《割圆密率捷法》中的公式、证明都是文字叙述的，显得非常冗长，繁琐。我们选录几个公式的原文，并对它们用现代的符号代数进行解释。

一、“杜氏九术”

《割圆密率捷法》在本卷的前九节给出了“杜氏九术”。

1. 圆径求周

“圆径求周”术的原文为：

法置通径，三因之，为第一条；次置第一条，四除之，又二除之，又三除之（或三数连乘得二十四为法，除之亦可，后仿此），得数为第二条；次置第二条，九因之，四除之，又四除之，又五除之，得数为第三条；次置第三条，二十五乘之，四除之，又六除之，又七除之，得数为第四条；次置第四条，四十九乘之，四除之，又八除之，又九除之，得数为第四条；……次置第十条，以三百六十一乘之，四除之，而又二十除之，又二十一除之，得数为第十一条．并十一条之数，得总数，即圆周。

在本术中，《割圆密率捷法》给出了直径求圆周长的公式，公式是用无穷级

数表示的。

设通径（即直径）为 d，

则第一条(项)为 3d,

第二条(项)为 $\frac{3d}{4\cdot3\cdot2}$

第三条(项)为 $\frac{3d}{4\cdot3\cdot2}\cdot\frac{9}{4\cdot4\cdot5}=\frac{3^2}{4^2\cdot5!}\cdot3d$

第四条(项)为 $\frac{3^2}{4^2\cdot5!}\cdot3d\cdot\frac{25}{4\cdot6\cdot7}=\frac{3^2\cdot5^2}{4^3\cdot7!}\cdot3d$

……

《割圆密率捷法》一直给到第十一条(项)，再把这十一条(项)加起来得到了圆径求周的级数展开式 π d=3d

在《割圆密率捷法》中，圆周级数展开式只给了第十一项（第十一条），余项并未给出，但明安图、陈际新等人在此术的按语中明确指出：

若依各数递加为法求至无穷，皆能得其密数也。

明安图、陈际新等人认为只有算至无穷，才能得到准确的圆周长，他们认为项数实际上是无限的。

此外，明安图、陈际新等人在按语中也给出级数通项计算的递归公式：

$$a_1=3d \quad a_{n+1}=\frac{(2n-1)^2}{4(2n)(2n+1)}a_n$$

$$\pi\text{d}=\sum_1^\infty a_n$$

明安图、陈际新等人在此术按语中指出："此即后通弦求弧背法也"。他们认为"圆径求周"术是后面的"通弦求弧背"术的特例。

2. 弧背求正弦

对"弧背求正弦"术，陈际新等人写道：

法以弧背本数为第一条。次以半径为连比例第一率，弧背为连比例第二率，求得连比例第三率；次置第一条，以三率乘之，一率除之，得第四率数；二除之，又三除之，得数为第二条。应减，另书之。次置第二条，以三率乘之一率除之，得第六率数，四除之，又五除之，得数为第三条。应加，书于第一条之下。次置

第三条，以三率乘之，一率除之，得第八率数，六除之，又七除之，得数为第四条。应减，书于第二条之下。第一条、第三……相并，第二条、第四条……相并。两总数相减，得数即正弦。

在求第二术时，《割圆密率捷法》运用了其主要数学方法——连比例法。连比例法在《几何原本》中记有记载，利玛窦、徐光启译《几何原本》第六卷介绍了连比例。如该卷第十七题称："三直线为连比例，即首尾两线矩内，即首尾内线矩内直角形与中线上直角方形等……"。这说明三条线段 a、b、c, 如果 a:b=b:c，那么 a、b、c, 成连比例。其中 a、b、c 分别为连比例第一，第二，第三率。连比例法在《数理精蕴》中也有说明和应用，在《割圆密率捷法》中则得到了充分的发展，成为明安图、陈际新等人解决数学问题的有力工具，在此术中，设半径 r 为第一条（项），并为连比例第一率，弧背 a 为连比例第二率，那么，连比例第三率为 $\frac{a^2}{r}$，由到可得到：

第二条（项）为 $a\cdot\frac{a^2}{r}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{2\cdot3}=\frac{a^3}{3!r^2}$

第三条（项）为 $\frac{a^3}{3!r^2}(\frac{a^2}{r}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{4\cdot5})=\frac{a^5}{5!r^4}$

第四条（项）为 $\frac{a^5}{5!r^4}(\frac{a^2}{r}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{6\cdot7})=\frac{a^7}{7!r^6}$

……

再把奇数一、三、五……条（项）相加的总和减去偶数二、四、六……条（项）相加的总和得到了正弦公式：

$$r\sin\frac{a}{r}=a-\frac{a^3}{3!r^2}+\frac{a^5}{5!r^4}-\frac{a^7}{7!r^6}+\cdots \qquad (ii)$$

在此术中，明安图、陈际新等人也给出了通项的递推公式：

$$a_1=a \qquad a_{n+1}=-\frac{a^2}{(2n)(2n+1)r^2}a_n \qquad r\sin\frac{a}{r}=\sum_1^{\infty}a_n$$

在余下的七术中，《割圆密率捷法》用连比例法和级数各项之间的递推关系把这七个公式表示出来。

3. 弧背求正矢

对弧背求正矢级数展开式，《割圆密率捷法》给出了级数通项的递推公式：

$a_1 = \frac{a^2}{2!r}$ $\qquad a_{n+1} = -\frac{a^2}{(2n+1)(2n+2)r^2} a_n$

由此可得到正矢的级数展开式：

$$r vers \frac{a}{r} = \frac{a^2}{2!r} - \frac{a^4}{4!r^3} + \frac{a^6}{6!r^5} - \frac{a^8}{8!r^7} + \cdots \qquad \text{(iii)}$$

4. 弧背求通弦

所谓通弦即某弧所对应的弦，指一个弓形的弦长。设某弧长为（2a），则通弦为 c= $2r\sin\frac{a}{r}$。《割圆密率捷法》给出通弦级数展开式通项的推递公式为：

a_1=2a $\qquad a_{n+1} = -\frac{(2a)^2}{4(2n)(2n+1)r^2} a_n$

由此可得通弦级数展开式为：

$$c = 2r\sin\frac{a}{r} = (2a) - \frac{(2a)^3}{4 \cdot 3!r^2} + \frac{(2a)^5}{4^2 \cdot 5!r^4} - \frac{(2a)^7}{4^3 \cdot 7!r^6} + \cdots \qquad \text{(iv)}$$

“弧背求通弦”术[公式（iv）]与“弧背求正弦”术[公式(ii)]实质上是等价的，但几何意义却有区别。在公式（iv）中，我们应把(2a)理解为一个整体。($2r\sin\frac{a}{r}$)也应理解成一个整体。

对于公式（iv）与公式（ii）的等价性，《割圆密率捷法》在此术的按语中作了说明。陈际新等人写道：“此法与求正弦法同，但通加一四除耳。”

5. 弧背求矢

在中国传统数学中，“矢”与“正矢”这两个概念是有区别的。“正矢”属“八线”之一，是一种三角函数。“矢”指弓形的高，弧背即弓形所对的弧的弧长。设弧长为（2a），则矢长为 b= $r vers\frac{a}{r}$。《割圆密率捷法》给出 $r vers\frac{a}{r}$ 级数展开式的通项的推递公式为：

$a_1 = \frac{(2a)^2}{4 \cdot 2!r}$ $\qquad a_{n+1} = -\frac{(2a)^2}{4(2n)(2n+1)r^2} a_n$

由引可得弧背求矢公式为：

$$r vers\frac{a}{r} = \frac{(2a)^2}{4 \cdot 2!r} - \frac{(2a)^4}{4^2 4!r^3} + \frac{(2a)^6}{4^3 6!r^5} - \frac{(2a)^8}{4^4 8!r^7} + \cdots \qquad \text{(v)}$$

公式（v）与前面的“弧背求正矢”术(公式（iii）)是等价的。《割圆密率捷法》在此术的按语中对此也作了说明。但公式（v）与公式（iii）的几何意义是有区别的，在此术中，与上术一样，我们对（2a)，（$r vers\frac{a}{r}$）也应理解为一个整体。

6. 通弦求弧背

设 c 为通弦，《割圆密率捷法》给出的弧背（2a）的级数展开式的通项公式为：

$$a_1 = c \qquad a_{n+1} = \frac{(2n-1)^2 c^2}{4(2n)(2n+1)r^2} a_n$$

由此或得通弦求弧背公式：

$$(2a) = c + \frac{1^2 c^3}{4\cdot 3! r^2} + \frac{1^2\cdot 3^2 c^5}{4^2 5! r^4} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2 c^7}{4^3 7! r^6} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2 c^9}{4^4 9! r^8} + \cdots \qquad \text{(vi)}$$

在此术的按语中，《割圆密率捷法》再一次指出公式（i）是本术的特例。

7. 正弦求弧背

设某角的正弦$\frac{c}{2} = r\sin\frac{a}{r}$，弧背为 a，《割圆密率捷法》给出的“正弦求弧背”的级数展开式中各项之间的递归关系为：

$$a_1 = \frac{c}{2} \qquad a_{n+1} = \frac{(2n-1)^2 (\frac{c}{2})^2}{(2n)(2n+1)r^2} a_n$$

由此可得，正弦求弧背的级数展开式为：

$$a = \frac{c}{2} + \frac{1^2(\frac{c}{2})^3}{3! r^2} + \frac{1^2\cdot 3^2(\frac{c}{2})^5}{5! r^4} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2(\frac{c}{2})^7}{7! r^6} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2(\frac{c}{2})^9}{9! r^8} + \cdots \qquad \text{(vii)}$$

对公式（vii），我们应将$\frac{c}{2}$(即正弦)理解成一个整体。

可以看出，公式（vii）与公式（vi）是等价的，都是反正弦函数的幂和展开式

arcsinx=$x + \frac{1^2 x^3}{3!} + \frac{1^2\cdot 3^2 x^5}{5!} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2 x^7}{7!} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2 x^9}{9!} + \cdots$的不同表示形式。

8. 正矢求弧背

在此术中，正矢 $b=r vers\frac{a}{r}$ 为已知，《割圆密率捷法》给出了正矢求弧背（实际上为弧背的平方）的级数展开式：

$$a^2=2br+\frac{2\cdot 1^2(2b)^2}{4!}+\frac{2\cdot 1^2\cdot 2^2(2b)^3}{6!r}+\frac{2\cdot 1^2\cdot 2^2\cdot 3^2(2b)^4}{8!r^2}+\cdots \qquad \text{(viii)}$$

9. 矢求弧背

《割圆密率捷法》给出的矢 $b=r vers\frac{a}{r}$ 求弧长(2a)的级数展开式为：

$$(2a)^2=(8b)r+\frac{2\cdot 1^2(8b)^2}{4^1 4!}+\frac{2\cdot 1^2\cdot 2^2(8b)^3}{4^2 6!r}+\frac{2\cdot 1^2\cdot 2^2\cdot 3^2(8b)^4}{4^3 8!r^2}+\cdots \qquad \text{(ix)}$$

显然公式（ix）与公式（viii）是等价的。

二、三角恒等式

在给出“杜氏九术”之后，《割圆密率捷法》又给出了几组三角恒等式，以及这些恒等式的应用。本部分又分四节。

1. 余弧求正弦正矢

陈际新等人在此节写道：

视所设之弧过四十五度者与象限弧相减，得余弧。次用余弧，按弧背求正矢正弦法，求得余弧正矢为本弧余矢，与半径相减，即得本弧正弦；求得余弧正弦为本弧余弦，与半径相减，即得本弧正矢。

《割圆密率捷法》在此节给出了余角的三角函数与本角的三角函数的关系，相当于下列公式：

$r\cdot vers(90°-\alpha)=r\cdot covers\alpha$ $\qquad$ $r-r\cdot covers\alpha=r\cdot sin\alpha$

$r\cdot sin(90°-\alpha)=r\cdot cos\alpha$ $\qquad$ $r-r\cdot cos\alpha=r\cdot vers\alpha$

根据当时八线（见本章第一节）的定义，和三角函数的性质，这些恒等式显然成立。

2. 余矢余弦求本弧

在此节，《割圆密率捷法》指出了如何运用上节的公式。首先根据上节的公式把一角的三角函数化成求小于45°角的三角函数，然后根据“杜氏九术”的有关公式进行计算。

3. 借弧求正弦余弦

在此节，《割圆密率捷法》给出了下列三角恒等式：

$r\cdot\sin\alpha = r\cdot\sin45^{\circ} - \sin45^{\circ}[r\cdot\sin(45^{\circ}-\alpha) + r\cdot \mathrm{vers}(45^{\circ}-\alpha)]$　($\alpha<45^{\circ}$)　(x)

$r\cdot\cos\alpha = r\cdot\cos45^{\circ} + \cos45^{\circ}[r\cdot\sin(45^{\circ}-\alpha) - r\cdot \mathrm{vers}(45^{\circ}-\alpha)]$　($\alpha<45^{\circ}$)　(xi)

$r\cdot\sin\alpha = r\cdot\sin45^{\circ} + \sin45^{\circ}[r\cdot\sin(\alpha-45^{\circ}) + r\cdot \mathrm{vers}(\alpha-45^{\circ})]$　($\alpha>45^{\circ}$)　(xii)

$r\cdot\cos\alpha = r\cdot\cos45^{\circ} - \cos45^{\circ}[r\cdot\sin(\alpha-45^{\circ}) - r\cdot \mathrm{vers}(\alpha-45^{\circ})]$　($\alpha>45^{\circ}$)　(xiii)

用现代方法不难证明，上面四个恒等式都是正确的

4. 借正弦余弦求弧背

此节指出了对上节的恒等式的应用。如果这些公式运用得当，可以把一角的三角函数化成求小于 22.5°角的三角函数。

第四节　“用法”概述

在卷二的卷首，《割圆密率捷法》指出：“今之法所以密于古者以其能用三角形也。然三角形非八线表不能相求。若一时不得其表，虽精于其法者，亦无以措手。惟用此法以之立表则甚易，以之推三角形，则不用表而得数，与用表者同其用”。明安图、陈际新等人认为《割圆密率捷法》给出的“杜氏九术”能不用八线表求出某弧的三角函数值，进而用于解三角形之中，这样可以摆脱对八线表的依赖。

随后，《割圆密率捷法》给出了若干“杜氏九术”的应用实例，这样的实例分成三类：“角度求八线”、“直线三角形边角相求”和“弧线三角形边角相求”。

一、“角度求八线”

《割圆密率捷法》给出了四例。

例 1：设圆半径一千万，求四十三度二十一分五十秒正弦几何？

此例相当于：已知 $r=10^7$，$\alpha=43^{\circ}21'50''$ 求：$r\cdot\sin\alpha$

对此例，《割圆密率捷法》给出了两种解法：

解法一：

∵1 圆周角 $360^\circ=360\times3600''=1296000''$

$2\pi r=62831853$

$\alpha=43\times60\times60''+21\times60''+50''=156110''$

∴α所对的弧 $a=62831853\times\dfrac{156110}{1296000}=7568426.3$

∴$r\cdot\sin\alpha$

$$=a-\frac{a^3}{3!r^2}+\frac{a^5}{5!r^4}-\frac{a^7}{7!r^6}+\cdots=$$

$7568426.3-722545.8+20694.0-282.0+0.2=6866294.7\approx6866295$

《割圆密率捷法》在计算 $r\cdot\sin\alpha$ 时，只计算到展式的第五项就达到了所需的精度。

解法二：

$45^\circ-\alpha=1^\circ38'10''=5890''$

$45^\circ-\alpha$ 所对的弧长 $62831853\times\dfrac{5890}{1296000}=28555.2$

∴ $r\cdot\sin(45^\circ-\alpha)=28555.2-38.8=285516.4$

$r\cdot\text{vers}(45^\circ-\alpha)=4077.0-0.2=4076.8$

在计算 $r\sin(45^\circ-\alpha)$ 和 $r\text{vers}(45^\circ-\alpha)$ 时，《割圆密率捷法》只计算到展开式的第二项，就达到了所需要的精度。

又∵$r\cdot\sin45^\circ=7071068$

∴ $\sin45^\circ[r\cdot\sin(45^\circ-\alpha)+r\cdot\text{vers}(45^\circ-\alpha)]=204773$

$r\cdot\sin\alpha=r\cdot\sin45^\circ-\sin45^\circ[r\cdot\sin(45^\circ-\alpha)+r\cdot\text{vers}(45^\circ-\alpha)]$

$=7071068-204773=6866295$

解法二运用了《割圆密率捷法》自创的三角恒等式公式。

例 2：设圆半径一千万，求四十三度二十一分五十秒之余弦几何？

此例相当于，已知 $r=10^7$，$\alpha=43^\circ21'50''$，求 $r\cdot\cos\alpha$

《割圆密率捷法》对此例给出了两种解法：

解法一为直接法：

上例已求得α所对的弧 $a=7568426.3$

$$r \cdot vers\alpha = \frac{a^2}{2!r^4} - \frac{a^4}{4!r^4} + \frac{a^6}{6!r^4} - \frac{a^8}{8!r^4} + \cdots$$

=2864053.5-136713.3+2610.3-26.7+0.2=2729924

∴r・cosα=r- r・versα=10000000-2729924=7270076

解法二为间接法：

上例已求得 45°-α 所对的弧长 28555.2 和下面两式：

r・sin(45°-α)=28555.2-38.8=285516.4

r・vers(45°-α)=4077.0-0.2=4076.8

∴r・sin(45°-α)- r・vers(45°-α)=281439.6

∴cos45°[r・sin(45°-α)- r・vers(45°-α)]=199007.8

∴r・cosα=r cos45°+ cos45°[r・sin(45°-α)- r・vers(45°-α)]

=7071068+199007.8=7270076

此解法也运用了《割圆密率捷法》自创的三角恒等式。

对于上面两例的解法中的各个数字，除了把中文数码换成阿拉伯数码之外，我们完全取自《割圆密率捷法》，并没有作任何改变。经用计算器验算，例 1 中的 r・sinα =6866294.45，例 2 中的 r・cosα =7270075.69。可以看出，《割圆密率捷法》计算的准确程度是非常惊人的。

例 3：设圆半径一千万，求四十六度三十八分十秒正弦几何？

此例相当于：已知 $r=10^7$，$\alpha=46°38'10''$，求 rsinα.

《割圆密率捷法》给出了两种解法，这两种解法都是运用三角恒等式求解的。

例 4：设圆半径一千万，求四十六度三十八分十秒之余弦几何？

《割圆密率捷法》对此例也是运用三角恒等式求解的。

二、直线三角形边角相求

“直线三角形边角相求”相当于解平面三角形，《割圆密率捷法》给出了两例：

例 1：设甲乙丙直线三角形，甲乙边一丈八尺七寸三分，甲角七十四度，三角六十二度，求余二边一角各几何？

此例相当于：已知△ABC, AB=1.873, ∠A=74°, ∠B=62°

求 AC, BC, 及∠C

《割圆密率捷法》给出了如下的解法：

作△ABC的高AH

∵∠BAC+∠B=74°+62°=138°

∴∠C =180°—(∠BAC+∠B)＝180°—138°=44°

设r =10^5，则∠C所对的弧长为76794.5。

∠B的余角（90°—∠B）所对的弧长为48869.2

∴r·vers(90°—∠B)＝11705

∴r·sin∠B=r-r·vers(90°-∠B)=10^5-11705=88295

rsin∠C＝69465.8

设半径r为第一率，r·sin∠B为第二率，AB为第三率，高AH为第四率[①]，由此可得：

AH＝(r·sin∠B·AH)/r=1.65376

设r·sin∠C为第一率，r为第二率，AH为第三率，则第四率为AC，由此可得：

AC=AH·r/(r·sin∠C)=2.38068

再由勾股定理可求得：

BH=$\sqrt{AB^2-AH^2}$=0.87932　　CH=$\sqrt{AC^2-AH^2}$=1.71252

∴BC=BH+BC=2.59184

在上例中，对rvers·(90°—∠C)和rsin∠C的计算，《割圆密率捷法》是用无穷级数计算的。其中r·vers(90°—∠B)计算到了第三项，rsin∠C计算到了第四项，就达到了所需的精度。

现代通常用正弦定理来解本例。《割圆密率捷法》给出本例的解法中没有直接运用正弦定理，但在解题过程中事实上已经推导出了正弦定理。

例2，设甲乙丙直线三角形甲丙边二丈三尺八寸零六厘八毫，乙丙边二丈五尺九寸一分八厘四毫，丙角四十四度。求余二角一边各几何？此例相当于：已知△ABC. AC=2.38068 BC=2.59184 ∠C=44°,求：AB、∠A及∠B。

《割圆密率捷法》给出了如下的解法：作△ABC的高AH。

设r=10^5,那么可得∠C的弧长为76794.5（见上题）

[①] 设比例式a:b=c:d,则a、b、c、d分别被清代中算家称为比例的“第一率”、“第二率”、“第三率”、“第四率”，或简称为“一率”、“二率”、“三率”、“四率”。

∴$r\cdot \text{vers}\angle C=28066$（用弧背求正矢公式算出）

∴$r\cdot\cos\angle C=r-r\cdot \text{vers}\angle C=71934$

设半径r为第一率，$r\cdot\cos\angle C$为第二率，AC为三率。

那么第四率$CH=(r\cdot\cos\angle C\cdot AC)/r=1.71252$

$BH=BC-CH=0.87932$

∵$AH^2=AC^2-CH^2$

$AB^2=AH^2+HB^2$

∴$AB^2=AC^2+HB^2-CH^2=AC^2-BC(CH-HB)$

∴ $AB=\sqrt{AC^2+HB^2-CH^2}=\sqrt{AC^2-BC(CH-HB)}=1.873$

又∵$r\cdot\cos\angle B=(r\cdot BH)/AB=46947.1$

∴$r\cdot\sin(90°-\angle B)=46947.1$

由“正弦求弧背”公式可得：（90°-∠B）所对的弧长为48868.8

∵1°所对的弧长为17453.3

∴$90°-\angle B=(48868.8/17453.3)°=28°$

∴ $\angle B=62°$

∴ $\angle CAB=180°-\angle C-\angle B=72°$

三、弧线三角形边角相求

“弧线三角形边角相求” 相当于解球面三角形，属球面三角学。球面三角学属初等数学，但在今天的中小学的数学教学中，球面三角学不再作为教学内容，所以一般人对它非常陌生。尽管如此，在天文计算中，球面三角学是非常重要的。《割圆密率捷法》在“用法”的“弧线三角形边角相求”给出了三道球面三角例题。对本部份的例题，我们在此不再详解，请参阅方匀的有关文章[①]。

第五节 “法解”概述（上）

《割圆密率捷法》卷三、卷四“法解”是《割圆密率捷法》的精华，证明了第一卷的“杜氏九术”和其它公式。卷三“法解上”分成四节：第一节为“分弧通弦率数求全弧通弦率数法解”，第二节为“弧背求通弦法解”，第三节为“通弦

[①]方匀.《割圆密率捷法》[A].李迪.中华传统数学文献精导读[C].武汉:湖北教育出版社,1999. 485-492.

求弧背法解”，第四节为“弧背正弦相求法解”；卷四“法解下”分成七节：第一节为“分弧正矢率数求全弧正矢率数法解”，第二节为“弧背求正矢法解”，第三节为“正矢求弧背法解”，第四节为“弧矢相求法解”，第五节为“弧矢弦正余互用法解”，第六节为“借弧背求正弦余弦法解”，第七节为“借正弦余弦求弧背法解。”“法解”的写作思路大体上可以分成两个阶段，前一个阶段为“分弧”，求得全弧的正弦正矢与分弧的正弦正矢的关系；后一阶段用极限的思想和级数回求法完成卷一提出的“杜氏九术”和其它公式的证明。为了保持本章各节的篇幅平衡，我们分三节讨论“法解”。其中前两节主要讨论“法解”的“分弧”，后一节讨论“法解”的其它内容。

在卷三，《割圆密率捷法》有一引言。陈际新写道：“凡解，有因法而得者，有不因法而得者，因法而得者，法如是，解如是，止也。不因法而得者，法如是，解不止于如是也。不因法而得，何以有是解乎？盖其初非为法解也。亦欲自立一法，与前法并行，及深思而得之，乃与作者昭合。遂以为是法之解，故法如是而解之，曲畅旁通不止于如是也”。

所谓“不因法而得者，”得到的解是思维突破常规的产物。陈际新接着谈到了其师明安图的几次思维飞跃：“先生初闻杜泰西圆径求周、弧背求统求矢之法，知其义深藏而不可不求甚解，欲自立一法以观其同异，因思古法有二分弧法，西法又有三分弧法，则递分之亦必有法也。由是思之遂得五分弧。七分弧。”通过比较三分弧、五分弧、七分弧的方法，明安图得到了九十九次之内的奇数次分弧方法。这是明安图思维的第一次飞跃。

“又思之，遂得二分弧、依前法递推至四分弧、六分弧。加减至百分弧，则偶数亦备矣”。这是明安图的思维的第二次飞跃，明安图得到了100以内的偶次分弧方法。

但象这样的一次二次递加，要得到千次、万次分弧的方法几乎是不可能的。明安图“又思之，其数可超位而得。”这是明安图的第三次思维飞跃。通过二分弧、五分弧求得十分弧，通过十分弧求得百分弧，通过十分弧和百分求得千分弧、通过十分弧、千分弧求得万分弧……。最后再比较百分弧、千分弧、万分弧的结果，明安图认为：“弧矢弦相求之密率捷法于是乎成矣”。

在引言最后，陈际新道：“际新亲承指授，且不敢违遗命，今辑其解并述其

意云”。

在本卷第一节“分弧通法率数求全弧通弦率数”,《割圆密率捷法》给出并证明了若干全弧通弦的分弧通弦的表达式。用现代数学语言表示，设y=2sin(nz),x=2sinz《割圆密率捷法》在此相当于给出了y=f(x),其中f(x)为一幂级数。在《割圆密率捷法》，n=2,3,4,5,10,100,1000,10000。这些级数（有限级数为多项式）后成了“弧背求通弦”的定法之基。

《割圆密率捷法》用连比例三角形为最基本的工具。如图5－1，设△ABC～△BCD～△CDE～△DEF～△EFG,则这些三角形为连比例三角形。根据相似三角形的性质可得AB:BC=BC:CD＝CD:DE=DE:EF=EF:FG。显然AB、BC、CD、DE、EF、FG为一等比数列。而幂级数 $f(x)=\sum_{0}^{\infty}a_nx^n$ 实质上也是一等比数列{ x^n }的各项乘以相应的系数 a_n 所得的积 a_nx^n，再求这些积 a_nx^n 的和。看来，《割圆密率捷法》运用连比例这一工具不是偶然的。在上述连比例三角形的例子中，AB、BC、CD、DE、EF、FG等被分别称为连比例第一率、第二率、第三率……等等。设 t_n 为一连比例的第n率，则有 $t_{m+n-p}=\frac{t_mt_n}{t_p}$（m+n-p＞0）。　(I)

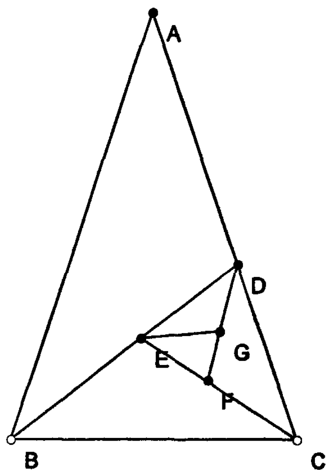


图5－1

显然一连比例序列由其第一率、第二率唯一确定。设 $t_1=b_0$，$t_2=b_0$x，那么，《割圆密率捷法》中最常见的表达式 $\sum_{1}^{\infty}a_nt_n$ 与幂级数 $\sum_{0}^{\infty}a_{n+1}b_0x^n$ 相当，即有 $\sum_{1}^{\infty}a_nt_n$

$$=\sum_{0}^{\infty} a_{n+1} b_0 x^n. \qquad \text{(II)}$$

在卷三第一节的各种分弧中，《割圆密率捷法》当对“二分弧通弦率数，求全弧通弦率数”的情形讨论最为详细，几乎用了本节的一半篇幅。《割圆密率捷法》的“二分弧通弦率数，求全弧通弦率数”也被罗见今等人进行了深入的发掘，发现其中蕴藏着深刻内涵。为了保持章节的篇幅平衡，对“二分弧”，我们将在下节进行探讨，但首先以现代方法给出“二分弧通弦率数，求全弧通弦率数”的结果：

为了下文讨论方便，我们首先约定符号。如果没有特别说明，在本章余下部分，我们设某弧全弧长为 2a，半径为 r，则全弧通弦 c=$2r\sin\frac{a}{r}$，n 分弧通弦 $c_n=2r\sin\frac{a}{nr}$；全弧矢长 b=$r vers\frac{a}{r}$，n 分弧矢长 $b_n=r vers\frac{a}{nr}$。其中$\frac{a}{r}<\pi$．又设 $\{t_n\}$为连比例各率，其中t_1=r，$t_2=c_n$。对“二分弧”则有$t_2=c_2$。根据二项式定理，我们可得：

$$c=2r\sin\frac{a}{r}=4r\sin\frac{a}{2r}\cos\frac{a}{2r}=4r\sin\frac{a}{2r}\sqrt{1-\sin^2\frac{a}{2r}}=4r\sin\frac{a}{2r}$$

$$\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix}\sin^{2n}\frac{a}{2r}$$

$$=4r\sin\frac{a}{2r}-2r\sum_{1}^{\infty}\frac{C_n\sin^{2n+1}\frac{a}{2r}}{4^{n-1}}=2c_2-\sum_{1}^{\infty}\frac{C_n c_2^{2n+1}}{4^{2n-1}r^{2n}}=2t_2-\sum_{1}^{\infty}\frac{C_n t_{2n+2}}{4^{2n-1}}$$ [1]

(III)

其中 Cn 为卡塔兰数（Catalan numbers）。卡塔兰数可定义为：

当 n=1 时，$C_1=1$；当 n 为其它自然数时，Cn=$\frac{1}{n}\begin{pmatrix}2n-2\\ n-1\end{pmatrix}$。

另外，$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix}$可定义为：

[1] 要特别注意此式中大小写“C”和“c”的区别，二者的含义决然不同。

当n=1时，$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix}=1$；当n为其它的自然数时，$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix}=\prod_{1}^{n}\frac{(\frac{1}{2}-i+1)}{i}$.

下面我们看看《割圆密率捷法》是如何分弧（二分弧除外）的

一、“三分弧通弦率数，求全弧通弦率数”

对“三分弧通弦率数，求全弧通弦率数”，《割圆密率捷法》给出了两种方法。其中第二种方法《数理精蕴》早有记载。《割圆密率捷法》“三分弧”的结果是$c=3t_2-t_4$.此结果相当于$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$.

二、“四分弧通弦率数，求全弧通弦率数”

《割圆密率捷法》给出的“四分弧通弦率数，求全弧通弦率数”的结果是：

$$c=4t_2-10\frac{t_4}{4}+14\frac{t_6}{4\cdot16}+12\frac{t_8}{4\cdot16^2}+22\frac{t_{10}}{4\cdot16^3}+52\frac{t_{12}}{4\cdot16^4}+104\frac{t_{14}}{4\cdot16^5}+408\frac{t_{16}}{4\cdot16^6}+\cdots$$

三、“五分弧通弦率数，求全弧通弦率数”

对“五分弧”，《割圆密率捷法》给出了下面的几何方法：

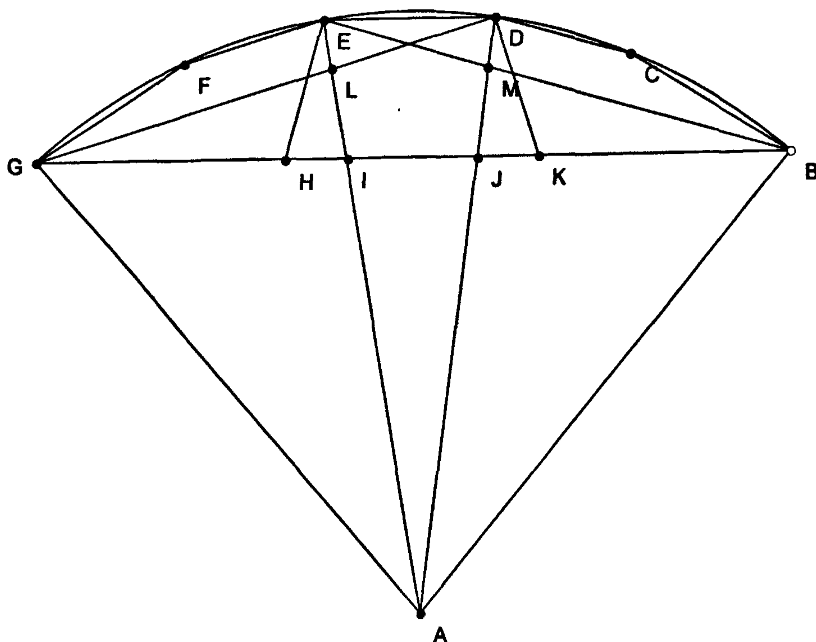


图5—2

如图5-2，以A为圆心，AB为半径，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CD}$等为5分弧，BC，CD等为5分弧通弦。BE，GD为3倍5分弧通弦，作BH=BE，GK=GD，联EH，DK。此二线各与DA，EA平行。

则△BEH与△EHI连比例，△DGK与△DKJ连比例，且△BEH≌△GDK．△ADE与△DEL连比例，且△BEH∽△AED.

根据连比例三角形的性质可得：

AB：BC=ED：EL或t_1：t_2=t_2：t_3

AB：EL=BE：HI　　　　HI=EL·BE/AB

$BG=2BE-BC-HI=2(3t_2-t_4)-t_2-(3t_2-t_4)\ t_3/t_1=5t_2-5t_4+t_6$

即　$BG=5t_2-5t_4+t_6$为所求五分弧通弦率数。

四、"十分弧通弦率数，求全弧通弦率数"

此法产生于明安图思维的第三次飞跃。即通过求"二分弧"、"五分弧"，以此为基础，再求10分弧。据此可推广到mn分弧情形，mn分弧可以在m分弧，n分弧的基础上，通过代数变换求得。此法后来项名达称为"易率法"，徐有壬称为"借径术"。此法如下：

先求一"五分弧通弦率数，求全弧通弦率数"

设{t_n'}为一连比例，其中$t_1'=r$为连比例第一率，$t_2'=c_5$为连比例第二率，则根据"五分弧通弦率数，求全弧通弦率数"可得：

$$c=5t_2'-5t_4'+t_6' \qquad \text{(IV)}$$

取$y=c_5$，上式可化成：$c=f(y)=5y-5y^3/r^2+y^5/r^4$　　　(V)

再把一条五分弧二分得：$c_5=2t_2-\sum_{1}^{\infty}\frac{C_n t_{2n+2}}{4^{2n-1}}$　　　(VI)

在这里，{t_n}为另一连比例，其中$t_1=r$为连比例第一率，$t_2=c_{10}$为连比例第二率。

取$x=c_{10}/r$，由(I)式可得：$c_5=2rx-r\sum_{1}^{\infty}\frac{C_n}{4^{2n-1}}x^{2n+1}$　　　(VII)

已设$y=c_5$，现代方法是把(VII)式代入到(V)式即可求得"十分弧通弦率数，求全弧通弦率数"。在求的过程中，首先通常要算出每个y^n。而《割圆密率捷法》

则先根据（VI）式把每个 t_n' 用 t_n（n=1, 2, 3, …）表示，然后再由(IV)求出 c。根据(I)式，y^n 的计算方法在本质上与 t_{n+1}' 的计算方法是一致的。

《割圆密率捷法》的“十分弧通弦率数，求全弧通弦率数”的结果是：

$$c=10t_2-165\frac{t_4}{4}+3003\frac{t_6}{4\cdot16}-21450\frac{t_8}{4\cdot16^2}+60775\frac{t_{10}}{4\cdot16^3}-41990\frac{t_{12}}{4\cdot16^4}-22610\frac{t_{14}}{4\cdot16^5}-29716\frac{t_{16}}{4\cdot16^6}\cdots \qquad \text{(VII)}$$

在这里，《割圆密率捷法》相当于要解决下面的问题：

已知：$f(y)=\sum_0^{\infty}a_ny^n$，$y=g(x)=\sum_0^{\infty}b_nx^n$．求 $f(g(x))$。

对上述求复合函数的级数展开式问题，用代数法把题目中的后式代入前式即可解出。可以看出，解决上述问题必然要涉及到幂级数的加法、减法、乘法和乘方运算。由于没有符号代数，《割圆密率捷法》对上述问题的解法在形式上与现代方法是有区别的。《割圆密率捷法》是利用连比例各率之间相互的关系完成幂级数的加法、减法、乘法和乘方运算的。尽管如此，在算理上，《割圆密率捷法》的方法与现代方法是相一致的。

《割圆密率捷法》利用与“十分弧” 类似的方法求得了“百分弧通弦率数，求全弧通弦率数”、“千分弧通弦率数，求全弧通弦率数”及“万分弧通弦率数，求全弧通弦率数”。其中“百分弧通弦率数，求全弧通弦率数”的结果是：

$$c=100t_2-166650\frac{t_4}{4}+333000030\frac{t_6}{4\cdot16}-316350028500\frac{t_8}{4\cdot16^2}$$

$$+174888840755750\frac{t_{10}}{4\cdot16^3}-630808814962046700\frac{t_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$+1597885566692498700\frac{t_{14}}{4\cdot16^5}$$

$$-2992154858314966282280\frac{t_{16}}{4\cdot16^6}\cdots \qquad \text{(IX)}$$

“千分弧通弦率数，求全弧通弦率数”的结果是：

$$c=1000t_2-166666500\frac{t_4}{4}+33333000000300\frac{t_6}{4\cdot16}-3174492064314285000\frac{t_8}{4\cdot16^2}$$

$$+17635202856684075557500\frac{t_{10}}{4\cdot16^3}-64122816019100669620472670000\frac{t_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$+1643975824573393806129707507870000\frac{t_{14}}{4\cdot16^{5}}$$

$$-3130853319350554100164704566287942800\frac{t_{16}}{4\cdot16^{6}}\cdots \tag{X}$$

“万分弧通弦率数，求全弧通弦率数”的结果是：

$$c=10000t_{2}-166666665000\frac{t_{4}}{4}+33333330000000003000\frac{t_{6}}{4\cdot16}$$

$$-3174602063492145714285000\frac{t_{8}}{4\cdot16^{2}}$$

$$+176366694885396366840755555575000\frac{t_{10}}{4\cdot16^{3}}$$

$$-641332916466812762435266962047272670000\frac{t_{12}}{4\cdot16^{4}}$$

$$+16444413857794457374149343983955092123078700000\frac{t_{14}}{4\cdot16^{5}}$$

$$-31322640127114357526697869850597636645662879994280000\frac{t_{16}}{4\cdot16^{6}}\cdots \tag{XI}$$

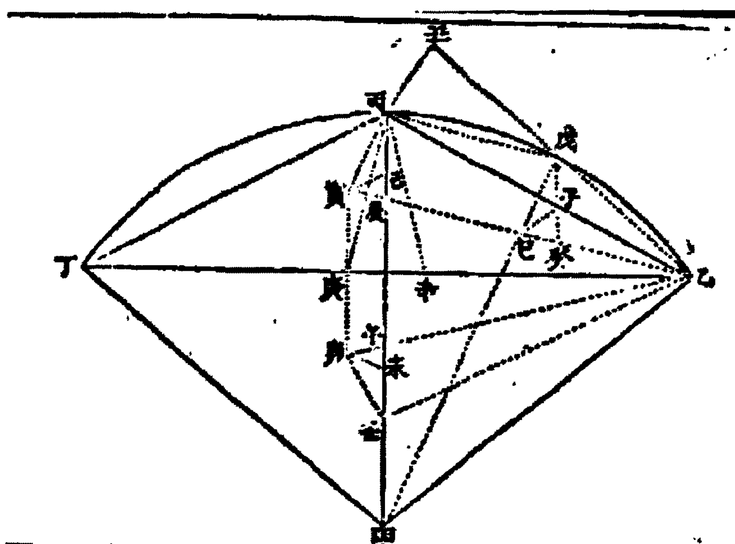
第六节　“法解”概述（中）

《割圆密率捷法》给出了三种“二分弧通弦率数，求全弧通弦率数”的方法，得到了相当于(II)式的结果。经李俨先生的早期研究[①]和罗见今的现代发掘[②]，这三种方法中包含着四种可以导出卡塔兰数的几何模型。下面我们综合李俨和罗见今的研究成果，对“二分弧通弦率数，求全弧通弦率数”的三种方法和每种方法其中蕴涵的深刻内涵分述如下：

[①] 李俨.明清算家的割圆术研究(J).科学,1927,第 12 卷(11).1487-1502.第 12 卷(12).1721-1766.1928,第 13 卷(1).53-102.第 13 卷(2).200-250。或参见：李俨.明清算家的割圆术研究[A].中算史论丛[C].李俨 钱宝琮科学史全集[Z].辽宁教育出版社,1998.254-484

[②] 罗见今.无穷级数中的卡塔兰数：明安图的四种几何模型[A]. 林东岱,李文林,虞言林.数学与数学机械化[C].山东教育出版社,2001.457-475.

一、第一法



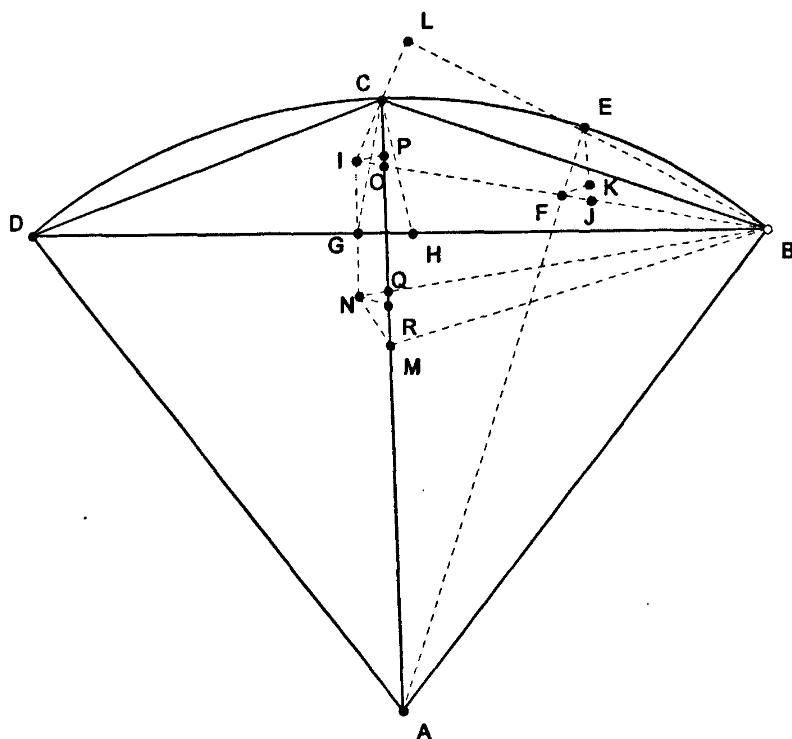


图 5—3[①]

① 以上为原书图和今天常用图。二者的区别仅在于表示的方式不同。清代中算家们用"甲、乙、丙、丁"等表示几何点。为了表述方便，我们换成了今天常见的表达方式。

如图 5－3，A 为圆心，AB 为半径，平分 BD 弧于 C，BC 弧于 E。联 DA, DB, DC; BC, CE, BE, AC, AE 各线。作 BF=BE，则△ABE 与△BEF 连比例，即 AB:BE=BE:EF, 又作 BG=DH=BC, 则△BCG 与△CGH 连比例。

因　∠BAE=∠CBD,

由此可得：△ABE～△BEF～△BCG～CGH。

即　AB:EF=BC:GH,

故　BD=2BC-GH=2BC-BC・EF/AB　　(XII)

又作 BM=BC，则有连比例△ABC，BCM。

即　AB:CB=BC:CM. 由此可得到一连比例序列$\{t_n\}$，其中t_1=AB, t_2=BC

又作为 EJ=EF，FK=FJ，则有连比例△ABE，BEF，EFJ，FJK。

由此可得到另一连比例序列$\{p_n\}$, 其中p_1=AB, p_2=BE

次引长 BE，BF，令 EL=BE，FI=BF，则△BEF～△BLI。以 BI 为轴，展△BGN，为△BNM。因∠GBN，NBM 为平分角，故 BG 与 BM 合。又作 IP=IO，则△CIO 与△IOP 连比例且△EFJ 与△FJK 连比例。因四边形 ABEC 与四边形 BLIN 相似，故

AB:(2BE)（=BL=BE+EC）=2BE:(LI+IN)（=CI+IN+NM）=2BE:CM+PO（=CM+JK)。

由前　AB:BC=BC:CM,

或　$t_1:t_2=t_2:t_3$

又　AB：BL=BL：(CI+IN+NM),

由此可得一连比例$\{q_n\}$, 其中q_1=AB, q_2=BL=2BE

因为 CI+IN+NM ＝4CI，所以 CI=$q_3/4$

易证得：CM=CI+IN+NM-PO, 其中 PO=KJ 为连比例$\{p_n\}$的第五率。

由三个连比例的关系，结合上式和连比例的性质[公式（I）]，不难得出：

$t_3=q_3-q_5/16$　　(XIII)

此式非常重要，相当于：$4r\sin^2\frac{a}{r}=16r\sin^2\frac{a}{2r}-16r\sin^4\frac{a}{2r}$ 或 $\sin^2 x=4\sin^2\frac{x}{2}-4\sin^4\frac{x}{2}$

用现代数学不难验证此式是正确的。根据公式(II)，此式又相当于：

$x=y-y^2/16$，其中 $x=4\sin^2\frac{a}{r}$，$y=16\sin^2\frac{a}{2r}$。

在得到公式（XIII）后，《割圆密率捷法》又运用了另外一种重要的方法——级数回求法，求出了q_3的t_n表达式，相当于求出了 $x=y-y^2/16$ 的反函数。现在我们根据《割圆密率捷法》中的思想方法用现代符号代数求出 $x=y-y^2/16$ 的反函数：

$$x=y-y^2/16$$

$$x^2/16=y^2/16-2y^3/16^2+y^4/16^3$$

$$2x^3/16^2=\quad 2y^3/16^2-6y^4/16^3+6y^5/16^4-2y^6/16^5$$

$$5x^4/16^3=\quad 5y^4/16^3-20y^5/16^4+30y^6/16^5-20y^7/16^6+\cdots$$

$$14x^5/16^4=\quad 14y^5/16^4-70y^6/16^5+140y^7/16^6-\cdots$$

$$42x^6/16^5=\quad 42y^6/16^5-252y^7/16^6+\cdots$$

$$132x^7/16^6=\quad 132y^7/16^6+\cdots$$

·········

把上述各式相加得：

$$y=x+x^2/16+2x^3/16^2+5x^4/16^3+14x^5/16^4+42x^6/16^5+132x^7/16^6+\cdots$$

级数回求法相当于用待定系数法求 $x=f(y)=\sum_0^{\infty}a_ny^n$ 的反函数。即设 $y=\sum_0^{\infty}b_nx^n$，把 $y=\sum_0^{\infty}b_nx^n$ 代入到 $x=\sum_0^{\infty}a_ny^n$ 中，再比较等式两边同次项的系数，从而求出b_n. 可以看出，《割圆密率捷法》在此正是用了级数回求法。

通过对比所有刚刚计算的各式的同次项，《割圆密率捷法》相当于得出了卡塔兰数的一种性质：$C_{n+1}=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n-k}{k+1}C_{n-k}$.

《割圆密率捷法》与现代符号代数求 $x=y-y^2/16$ 的反函数仅仅区别于表达方式上。把上式还原成率的表达式就是：

$$q_3=t_3+t_5/16+2t_7/16^2+5t_9/16^3+14t_{11}/16^4+42t_{13}/16^5+132t_{15}/16^6+\cdots$$

事实上，我们刚刚计算的每一步都可以换成相应的率的表达式。

把 $EF=q_3/4$, $AB=t_1$, $BC=t_2$，代入公式(XII)即可得到“二分弧通弦率数，求全

弧通弦率数”的第一种解法。

二、第二法

图 5—4

如图 5—4，在△BCM 内作 BM=BC，CS=CM，SH=MH；联各线，则有连比例△ABC，BCM，CMS，即 AB：BC=BC：CM=CM：MS，即 t_1：t_2=t_2：t_3=t_3：t_4。自 U，H 作 MB 之平行线 UYV，HW，则 $MT=\frac{1}{2}t_4$，$UYV=\frac{1}{4}t_4$.

因∠UCW=∠CBU=∠GCH，则△GCU≌△HCW 而 HW=UH=GU。

自 H 作 HX⊥UYV。因 MB||DC，UYV||MB，即 UYV||DC。而△DCH，UYH 为相似，故 UH=UY。

根据连比例三角形的性质和基本关系 UH+ HW—XY=UYV，可得：

$$\frac{1}{4}q_4-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}q_6=\frac{1}{4}t_4 \qquad \text{(XIV)}$$

上式中连比例序列$\{t_n\}$和$\{q_n\}$与第一法的含义相同。不难发现公式(XIII)和公式(XIV)是等价的，二者只是几何意义不同。

根据级数回求法求得$\frac{1}{4}q_4$，因 UH=$\frac{1}{4}q_4$，把 UH =$\frac{1}{4}q_4$代入到式BD=2BC-GH=2BC-2UH 中，就可得到所要的结果。

三、第三法

图 5—5

如图 5—5，引长 BC 交直垂线 DE 于 E，又作 BF=BE

则 DE=CM==a，

BD=b， BE=$2t_2$=c

这里连比例序列{t_n}的含义与前法同

而 $a^2+b^2=c^2$

次如图 5—6，作正方形 BEUG= c^2，和正方形 FHIG= b^2。

则 磬折形 BHUE=（c+b）(c-b)= a^2。

由勾股定理可得：（c+b）（c-b）= a^2，c-b=$\frac{a^2}{c+b}$

若分母分子为已知，则可直接求(c-b)。但仅有分子 $a^2=t_3^2$ 为已知，而分母(c+b)中仅有 $c=2t_2$ 为已知，如令 b=c 代入之，则分母为 $2c=4t_2$，可以先求得 c-b 较小之数，但实际 c>b 故，故 $\frac{a^2}{2c}$<c-b，现假令所得较小之数为 BP。

因上述 $\frac{t_3t_3}{4t_2}=\frac{t_4}{4}$ 之关系，即得 $\frac{a^2}{2c}$=BP=$\frac{t_4}{4}$ 为 $\frac{a^2}{c+b}$ 的初商。

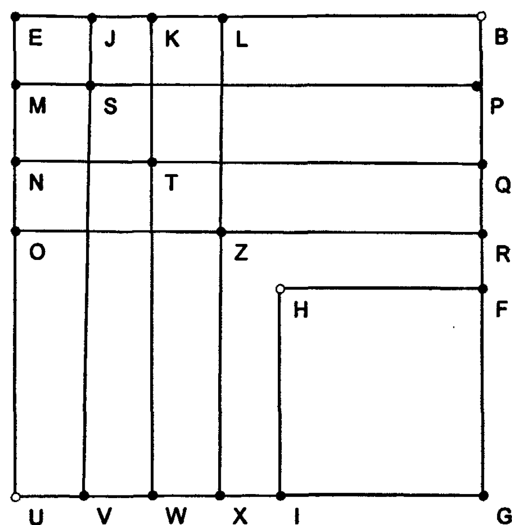


图 5—6

如图 5—6 中，磬折形 BHUE=四边形 BEMP+四边形 JEUV=磬折形 BSUE+四边形 EMSJ[①]

由此可得：四边形 EMSJ=磬折形 PHVS，而四边形 EMSJ=$(\frac{t_4}{4})^2$

根据 $\frac{(\frac{t_4}{4})^2}{4t_2}=\frac{t_6}{4\cdot16}$，即得 $\frac{磬折形PHVS}{2c}$=PQ, 此为 $\frac{a^2}{c+b}$ 的次商。

又如图 5—6 中，磬折形 PHVS= 四边形 PMNQ+四边形 KJVW=磬折形 QSVT+磬形折 JTNS。

① 在这里“磬折形 BHUE”等代表磬折形 BHUE 等的面积，以下同样表示，不再进一步说明。

即 磬折形 QHWT+磬折形 QSVT=磬折形 QSVT+磬折形 JTNS。

∴磬折形 JTNS=磬折形 QHWT。

而在磬折形 JTNS 中，$JS=\frac{t_4}{4}$，$PQ=\frac{t_6}{4\cdot 16}$

∴磬折形 QHWT =磬折形 JTNS=$(2\cdot\frac{t_4}{4}+\frac{t_6}{4\cdot 16})\frac{t_6}{4\cdot 16}$

故$\frac{\text{磬折形QHWT}}{4t_2}=2\cdot\frac{t_8}{4\cdot 16^2}+\frac{t_{10}}{4\cdot 16^3}$=QR 为$\frac{a^2}{c+b}$的三商。

同理，磬折形 RHXZ =磬折形 KZOT

$$=(2\cdot\frac{t_4}{4}+2\cdot\frac{t_6}{4\cdot 16}+2\cdot\frac{t_8}{4\cdot 16^2}+\frac{t_{10}}{4\cdot 16^3})\cdot(2\cdot\frac{t_8}{4\cdot 16^2}+\frac{t_{10}}{4\cdot 16^3})$$

故$\frac{\text{磬折形RHXZ}}{4t_2}=4\cdot\frac{t_{10}}{4\cdot 16^3}+6\cdot\frac{t_{12}}{4\cdot 16^4}+6\cdot\frac{t_{14}}{4\cdot 16^5}+4\cdot\frac{t_{16}}{4\cdot 16^6}$为$\frac{a^2}{c+b}$的四商。

依照同样的方法可求得五商、六商、七商等等

设r_n为 n 商，“准此而递推之”，可得到r_n的一个递推公式：

$$r_1=\frac{t_4}{4}$$

$$r_2=\frac{t_6}{4\cdot 16}$$

$$r_n=(2\sum_{1}^{n-2}r_k+r_{n-1})\,r_{n-1}/(4t_2) \qquad \text{(n 大于 2 时)}$$

故 $c-b=\sum_{1}^{\infty}r_i=\sum_{1}^{\infty}\frac{C_n t_{2n+2}}{4^{2n-1}}$

把此式代入到 b=c-(c-b) 中即可得到所要的结论。

第七节 “法解”概述（下）

在本节我们来讨论《割圆密率捷法》是如何最终完成第一卷给出的主要公式的证明的。《割圆密率捷法》用两大步收官：前一步用极限的思想完成弧求弦矢的各个公式证明，后一步用级数回求法证明弦矢求弧的各个公式。

一、《割圆密率捷法》对“弧背求通弦”术[公式(iv)]的证明

《割圆密率捷法》首先对公式（VIII）、公式（IX）、公式（X）（见本章第五节）进行变形，得到了如下的结果：

公式（VIII）相当于：

$$c=(100c_{100})-\frac{(100c_{100})^3}{\frac{4(100)^3}{166650}r^2}+\frac{(100c_{100})^5}{\frac{4(100)^3}{166650}\bullet\frac{166650\bullet16(100)^2}{333000030}\bullet r^4}-$$

$$\frac{(100c_{100})^7}{\frac{4(100)^3}{166650}\bullet\frac{166650\bullet16(100)^2}{333000030}\bullet\frac{333000030}{31630018500}r^6}+\cdots$$

或

$$c=(100c_{100})-\frac{(100c_{100})^3}{24.0024r^2}+\frac{(100c_{100})^5}{24.0024\bullet80.07r^4}$$

$$-\frac{(100c_{100})^7}{24.0024\bullet80.07\bullet168.42r^6}+\frac{(100c_{100})^9}{24.0024\bullet80.07\bullet168.42\bullet289.41r^8}$$

$$-\frac{(100c_{100})^{11}}{24.0024\bullet80.07\bullet168.42\bullet289.41\bullet443.59r^{10}}+\cdots$$

公式(IX)相当于：

$$c=1000c_{1000}-\frac{(1000c_{1000})^3}{24.000024r^2}+\frac{(1000c_{1000})^5}{24.000024\bullet80.0007r^4}$$

$$-\frac{(1000c_{1000})^7}{24.000024\bullet80.0007\bullet168.0042r^6}+\frac{(1000c_{1000})^9}{24.000024\bullet80.0007\bullet168.0042\bullet288.014r^8}$$

$$-\frac{(1000c_{1000})^{11}}{24.000024\bullet80.0007\bullet168.0042\bullet288.014\bullet440.035r^{10}}+\cdots$$

公式(X)相当于：

$$c=10000c_{10000}-\frac{(10000c_{10000})^3}{24.00000024r^2}+\frac{(10000c_{10000})^5}{24.00000024\bullet80.000007r^4}$$

$$-\frac{(10000c_{10000})^7}{24.00000024\bullet80.000007\bullet168.000042r^6}$$

$$+\frac{(10000c_{10000})^9}{24.00000024\bullet80.000007\bullet168.000042\bullet288.00014r^8}$$

$$-\frac{(10000c_{10000})^{11}}{24.00000024\bullet80.000007\bullet168.000042\bullet288.00014\bullet440.00035r^{10}}$$

$$+\frac{(10000c_{10000})^{13}}{24.00000024 \cdot 80.000007 \cdot 168.000042 \cdot 288.00014 \cdot 440.00035 \cdot 624.00075 r^{12}}-$$

$$\frac{(10000c_{10000})^{15}}{24.00000024 \cdot 80.000007 \cdot 168.000042 \cdot 288.00014 \cdot 440.00035 \cdot 624.00075 \cdot 840.0014 r^{14}}$$

$+\cdots$

《割圆密率捷法》在比较上述三式中相应项分母中的各数之后，认为随着弧越分越细，这些数的整数部分将不变，而小数部分“(奇零之差) 逼弧愈近则愈微。”如比较上述三式第二项分母中的三数 24.0024、24.000024、24.00000024 可以看出这三数确实与 24 的差越来越小。其它各数也莫不如此。用外推法《割圆密率捷法》得出了这样的结论：如果把弧分无限次，并且分得的每条小弧的通弦的长度趋向于零，这样各数的奇零就会消失，从而可证得“弧背求通弦”术。在这里，《割圆密率捷法》用分得的小弧的通弦代替相应的小弧背，相当于运用了重要极限：

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

可以看出，《割圆密率捷法》给出的证明是不太严格的，但在当时的条件下能给出这样的证明确实是一项伟业。

二、《割圆密率捷法》对“通弦求弧背”术（公式 vi）的证明

明安图、陈际新等人在《割圆密率捷法》第三卷的“通弦求弧背法解”节中明确指出：

弧背求通弦率数既定，用其率数反求之即可得通弦求弧背率数。……盖通弦率数由弧背而得，而弧背率数又即因通弦率数而定。其环转相生之妙亦犹求二分弧通弦率数前二法之义也。

明安图、陈际新等人指出“通弦求弧背”术的证法与前面的“二分弧通弦率数”三种求法的前二法类似。我们已经知道，在这两种方法中用到了级数回求法。下面我们看看《割圆密率捷法》如何用级数回求法求解“通弦求弧背”术。

首先计算各个$\frac{c^n}{r^{n-1}}$：

$$c=(2a)-\frac{(2a)^3}{4 \cdot 3! r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2 \cdot 5! r^4}-\frac{(2a)^7}{4^3 \cdot 7! r^6}+\frac{(2a)^9}{4^4 \cdot 9! r^8}-\frac{(2a)^{11}}{4^5 \cdot 11! r^{10}}+\frac{(2a)^{13}}{4^6 \cdot 13! r^{12}}-\cdots$$

$$\frac{c^2}{r}=\frac{(2a)^2}{r}-2\cdot\frac{(2a)^4}{4\cdot3!r^3}+\frac{16}{3}\cdot\frac{(2a)^6}{4^2\cdot5!r^5}-16\cdot\frac{(2a)^8}{4^3\cdot7!r^7}$$

$$+\frac{256}{5}\cdot\frac{(2a)^{10}}{4^4\cdot9!r^9}-\frac{512}{3}\cdot\frac{(2a)^{12}}{4^5\cdot11!r^{11}}+\frac{4096}{7}\frac{(2a)^{14}}{4^6\cdot13!r^{13}}-\cdots$$

$$\frac{c^3}{r^2}=\frac{(2a)^3}{r^2}-3\cdot\frac{(2a)^5}{4\cdot3!r^4}+13\cdot\frac{(2a)^7}{4^2\cdot5!\cdot r^6}-\frac{205}{3}\cdot\frac{(2a)^9}{4^3\cdot7!\cdot r^8}$$

$$+\frac{2013}{5}\frac{(2a)^{11}}{4^4\cdot9!\cdot r^{10}}-2555\cdot\frac{(2a)^{13}}{4^5\cdot11!\cdot r^{12}}+\frac{597871}{35}\cdot\frac{(2a)^{15}}{4^6\cdot13!\cdot r^{14}}-\cdots$$

$$\frac{c^5}{r^4}=\frac{(2a)^5}{r^4}-5\cdot\frac{(2a)^7}{4\cdot3!\cdot r^6}+\frac{115}{3}\cdot\frac{(2a)^9}{4^2\cdot5!\cdot r^8}-\frac{1135}{3}\cdot\frac{(2a)^{11}}{4^3\cdot7!\cdot r^{10}}$$

$$+4417\cdot\frac{(2a)^{13}}{4^4\cdot9!\cdot r^{12}}-58085\cdot\frac{(2a)^{15}}{4^5\cdot11!\cdot r^{14}}+\cdots$$

$$\frac{c^7}{r^6}=\frac{(2a)^7}{r^6}-7\cdot\frac{(2a)^9}{4\cdot3!\cdot r^8}+77\cdot\frac{(2a)^{11}}{4^2\cdot5!\cdot r^{10}}-\frac{3353}{3}\cdot\frac{(2a)^{13}}{4^3\cdot7!\cdot r^{12}}+\frac{98001}{5}\cdot\frac{(2a)^{15}}{4^4\cdot9!\cdot r^{14}}-\cdots$$

$$\frac{c^9}{r^8}=\frac{(2a)^9}{r^8}-9\cdot\frac{(2a)^{11}}{4\cdot3!\cdot r^{10}}+129\cdot\frac{(2a)^{13}}{4^2\cdot5!\cdot r^{12}}-2473\cdot\frac{(2a)^{15}}{4^3\cdot7!\cdot r^{14}}+\cdots$$

$$\frac{c^{11}}{r^{10}}=\frac{(2a)^{11}}{r^{10}}-11\cdot\frac{(2a)^{13}}{4\cdot3!\cdot r^{12}}+\frac{583}{3}\cdot\frac{(2a)^{15}}{4^2\cdot5!\cdot r^{14}}-\cdots$$

$$\frac{c^{13}}{r^{12}}=\frac{(2a)^{13}}{r^{12}}-13\cdot\frac{(2a)^{15}}{4\cdot3!\cdot r^{14}}+\cdots$$

$$\frac{c^{15}}{r^{14}}=\frac{(2a)^{15}}{r^{14}}-\cdots$$

然后用待定系数法逐个求得 $\frac{c^n}{r^{n-1}}$ 的系数，由此可证得公式（iv)。

在证明公式（iv）时，级数回求法的运用的难度明显比前面求“二分弧通弦率数”有所加强。在这里，要多次计算无穷幂级数的乘方，而前法只是多次计算多项式的乘方。

在《割圆密率捷法》卷三的最后一节“弧背正弦相求法解”中，明安图、陈际新等人首先用几何方法证明了通弦和正弦的关系：$r\sin\frac{a}{r}=2(\frac{1}{2}r)\sin\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}r}$（其中 a 为某角所对的弧长，r 为半径，$r\sin\frac{a}{r}$ 为某角的正弦；a 为该角的 2 倍角所

对的弧长，$(\frac{1}{2}r)$为2倍角的半径，$2(\frac{1}{2}r)\sin\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}r}$为2倍角的通弦），据此可证明了公式(ii)和公式(vii)。

《割圆密率捷法》卷四用与证明弧弦互求的四个公式完全相同的思想方法证明了弧矢互求的四个公式，对此，我们不再详述。

第八节 《割圆密率捷法》的影响

《割圆密率捷法》对清代数学产生了深远的影响。《割圆密率捷法》的成书直接启动了中算家们对无穷级数的研究，在晚清，数学家们掀起了一股研究无穷级数的热潮。清代数学家能取得微积分的部分成果，是通过研究无穷级数实现的[①]。所有这些，都是以明安图、陈际新等人的工作为开端的。孔广森、董祐诚、项名达、朱鸿、张豸冠、徐有壬、戴煦、李善兰、丁取忠、夏鸾翔等人都或多或少受到了《割圆密率捷法》的影响。在这些人中，董祐诚、项名达等人的成就较为突出。

董祐诚（1791－1823）字方立，江苏阳湖（今常州市）人。自幼聪颖异常，5岁能通九九数，少年时工为骈体文词，继通数理、舆地之学。18岁与人研习数学，尽通诸家算法，1818年中举人。1819年在北京友人朱鸿处见到张豸冠的抄本“杜氏九术”。他“反复寻绎，究其立法之原”[②]，一年之后撰成《割圆连比例图解》三卷。在《割圆连比例图解》中，他把割圆连比例法和我国传统的堆垛术结合起来，从一群成连比例的几何线段入手，探求全弧通弦与分弧通弦的关系，同时发现全弧矢长与分弧矢长的关系，通过较为复杂的计算找到了下面4个幂级数，以此作为“立法之原”，可以推出全部“杜氏九术”。

$$c=nc_n-\frac{n(n^2-1)}{4\cdot3!}\frac{c_n^{\ 3}}{r^2}+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{4^2\cdot5!}\frac{c_n^{\ 5}}{r^4}-\cdots \qquad \text{（n 为奇数）}$$

$$c_n=\frac{c}{n}+\frac{(n^2-1)}{4\cdot3!n^3}\frac{c^3}{r^2}+\frac{(n^2-1)(9n^2-1)}{4^2\cdot5!n^5}\frac{c^5}{r^4}+\cdots \qquad \text{（n 为奇数）}$$

① 郭金彬.中国近代的级数展开式研究[J]自然辩证法通讯,1991(6):53-59.
② 罗士琳.续畴人传,卷五十一[M].中华书局，1991.81.

$$b = n^2 b_n - \frac{n^2(n^2-1)}{4!}\frac{(2b_n)^2}{r} + \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{6!}\frac{(2b_n)^3}{r^2} - \cdots$$

$$b_n = \frac{b}{n^2} + \frac{(n^2-1)}{4!n^4}\frac{(2b)^2}{r} + \frac{(n^2-1)(4n^2-1)}{6!n^6}\frac{(2b)^3}{r^2} + \cdots$$

可以看出，董祐诚给出的结果比明安图、陈际新等人的结果深刻。明安图、陈际新等人给出的“杜氏九术”的证明是粗略的，董祐诚给出的证明基本上是严格的。董祐诚后来看到了完整的《割圆密率捷法》四卷本，方知自己的研究方法与明、陈师弟的方法不同，却殊途同归。董祐诚还著有《堆垛求积术》1 卷、《椭圆求周术》1 卷和《斜弧三边求角补术》1 卷。可惜董祐诚只活了 33 岁，英年早逝。其遗稿 9 种共 16 卷由其兄董基诚于 1827 年刻于北京，题称《董方立遗书》。

项名达的“割圆术”在董祐诚的基础上又进了一步。

项名达（1789—1850），原名万准，字步莱，号梅侣，浙江钱塘（今杭州市）人，祖籍安徽歙县。生于乾隆五十四年，卒于道光三十年。嘉庆二十一年(1816 年)为举人，考授国子监学正，道光六年(1826)成进士，改任知县，但未就职。在应考进士期间，曾在京游学数年，与友人研讨数学。后返居故里。他晚年曾在杭州著名的三大书院之一紫阳书院执教，并研究数学。道光二十六年(1846 年)冬，退职还家，集中精力撰著书稿，主要数学著作有《象数一原》6 卷(1849 年)，《勾股六术》1 卷(1825 年)，《三角和较术》1 卷(1843 年)，《开诸乘方捷术》1 卷(1845 年)，后三种合刻为《下学庵算学》印行。

项名达的主要数学著作《象数一原》的主要内容是论述三角函数幂级数展开式问题。他在写此书时已年老病重，仅写成“整分起度弦矢率论”、“半分起度弦矢率论”、“零分起度弦矢率论”（两卷）、“诸术通诠”、“诸术明变，”共 6 卷。其中卷四和卷六未能完稿，由其友人戴煦（1805—1860）遵从他的嘱托于咸丰七年(1857)补写完成，戴煦补作“椭圆求周术图解”1 卷，故现传本《象数一原》共 7 卷。在《象数一原》中，项名达把董祐诚的四个基本公式概括为如下的两个公式：

$$c_m = \frac{n}{m}c_n + \frac{n(m^2-n^2)}{4 \cdot 3!m^3}\frac{c_n^3}{r^2} + \frac{n(m^2-n^2)(9m^2-n^2)}{4^2 \cdot 5!m^5}\frac{c_n^5}{r^4} + \cdots$$

$$b_m = \frac{n^2}{m^2}b_n + \frac{n^2(m^2-n^2)(2b_n)^2}{4!m^4 r} + \frac{n^2(m^2-n^2)(4m^2-n^2)(2b_n)^3}{6!m^6 r^2} + \cdots$$

可以看出，项明达的结果比董祐诚的结果更深刻。董祐诚的四个基本公式是项明达的两个公式当 n=1 或 m=1 时的特殊情形。

项名达用级数研究“割圆术”，其成就在清代达到了高峰。后来人很难在“割圆术”上再有深入的突破，他们转而用其它方法研究函数的幂级数展开式。戴煦、李善兰、顾观光、夏鸾翔等人在这个方面都作出了一定的成绩，在中国数学史中记下了光辉的一页。戴煦在《对数简法》（1845 年）中得到了指数为有理数的二项式定理，在《续对数简法》中给出了对数函数的幂级数展开式，在《外切密率》（1852 年）中正确地创立了正切函数、余切函数、正割函数、反正切函数、反正割函数等函数的幂级数展开式。李善兰于 1845 年发表他的有关幂级数的三种研究成果——《方圆阐幽》、《弧矢启秘》与《对数探源》。《方圆阐幽》一卷阐述他自已创造的尖锥求积术，并以求圆的面积为例子说明尖锥术的应用。李善兰的尖锥术已经处于微积分最终结成果的边缘。

清代中算家在级数研究方面取得很大的成绩，得到了部分相当于微积分的成果，明安图、陈际新等人作为开创者，功不可没。

第九节 《割圆密率捷法》数学思想概述

经李俨和钱宝琮等人奠定了对《割圆密率捷法》的研究基础，再经罗见今、方匀等人的现代深入发掘，《割圆密率捷法》的数学成就已经得到了充分的研究。在上述诸人中，罗见今对的数学成就和数学思想归纳最为系统，他认为《割圆密率捷法》的数学成就和数学思想表现为如下几个方面[①]：

1. 把原有的连比例法发展成完整的“割圆连比例法”。

在《数理精蕴》下编《借根方比例》中有“根（x）与方（x^n）数俱为相连比例率”的内容，并用连比例法求证十八边形一边之长。明安图、陈际新等人推广了这种方法，几何对象未必是确定的正 n 边形，方数未必有限，并赋予明确的三角学意义。该法用圆半径 r、通弦 2rsinx、正矢 rversx 以及有关线段所构成的、若干系列等比的相似三角形，把有限项的等比数列推演至无穷多项，获得弦或矢函数的无穷幂级数。这是《割圆密率捷法》一书中创造的主要数学方法，它把几何、代数、三角和级数的问题进行综合处理，并具有构造性数学的明显特征（见本

[①] 罗见今.明安图[A].金秋朋.中国科学技术史（人物卷）[C].科学出版社,1998.688-697.

章第三节、第六节等）。

2. 把“率”的概念应用于无穷级数，并独创了一套完整的级数记法。

中国古算中“率”是一个重要的数学概念，《割圆密率捷法》首次把它用于幂级数。他所说的“率”、“率数”，一般指弦或矢的函数值（弦、矢之长），“各率”便可构成升幂的函数项级数。例如，设 $x=2\sin z$，x^n就称为“第 n+1 率”。针对不同的几何图形所说的“第 n+1 率”或“又 n+1 率”是公比不同的连比例，这是《割圆密率捷法》中的精微之处。明安图、陈际新等人创造了一套无穷级数的记法，在率数（x^n）上面写系数分母，下面写系数分子，符号“+”、“-”用“多、少”或“加、减”表示（见本章第五节）。

3. 在中国数学史上奠定了无穷级数运算的基础。

在中算史上无穷级数的加、减、乘（包括数乘、项乘、互乘）是由《割圆密率捷法》引进的。如果说把无穷级数当成多项式来处理时，加、减、数乘与项乘（用单项式或多项式乘）与通常多项式运算没有多大区别的话，那么无穷级数自乘、互乘便是全新的课题，它涉及到排序方式和同次项（同率项）间的结合法。《割圆密率捷法》严格规定分母的形式，分子不与分母约简，在运算中便获得多种系分子序列，形成有价值的计数结构。《割圆密率捷法》不仅导出和证明了九个无穷级数，还在“通弦八题”中获得 $\sin 2x$、$\sin 4x$ 等的无穷展开式，占有不可忽略的地位（见本章第五节、第六节、第七节）。

4. 在世界数学史上首先提出并应用了卡塔兰数。

卡塔兰数Cn:1, 2, 5, 14, 42, 132, …是组合数学中一种应用广泛的重要计数函数，迄已发表了 600 多篇论文，因法国数家卡塔兰（E. Catalan, 1848-1894）在 1888 年发表的一篇论文而得名，大数学家欧拉（L. Euler, 1707-1783）在 1758 年曾研究过它。明安图、陈际新等人比西方数学家更早获得了卡塔兰数，在《割圆密率捷法》卷三有数种不同的方法算出了这种数列。其中有两种递推公式是过去和现在的数学中均未知的，目前尚未无现代的证明，引起了中外学者极大的兴趣[①]（见本章第六节）。

5. 创立用含卡塔数的级数无穷逼近平方根的算法。

中国数学史上开方术源远流长，而用无穷逼近的方法来求平方根则为明安

[①] 方匀.《割圆密率捷法》[A].中华传统数学文献精导读[C].湖北教育出版社,1999. 485-492.

图、陈际新等人首创，在逼近论发展史上不啻为一项杰作。

《割圆密率捷法》第三卷在圆上构造了一个勾股形，已知弦 c=2x，勾 $a=x^2$，欲求股 b。明安图、陈际新等人精心设计了一个几何模型，证明了：

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=2x-\sum_{1}^{\infty}\frac{C_n x^{2n-1}}{4^{2n-1}}$$

在该书中这一部分内容比较深奥难解。我们知道，牛顿二项式定理当指数是 1/2 时，展开式系数可以用卡塔兰数表示，这就为《割圆密率捷法》的平方根逼近论找到了理论上的根据（见本章第六节）。

6. 应用递推法从事商位数值计算

《割圆密率捷法》中除几何与三角证明和运算外，大部分的计算应用了递推法，甚至获得的结果也带有递归的形式。如第一卷“杜氏九术”是用递归公式表示的（见本章第一三节）。另外，在第三、四卷中为证明公式（ii）和公式(iii)，明安图、陈际新等人用递推法算出了 48 项商位系数，最大的达 54 位。今人用计算机检验了这些结果，其精确度令人吃惊。

7. 在中国数学史上首开无穷级数证明的先河，创造长达 2.5 万字证明的记录。

为了证明公式（ii）和公式（iii）中得弦矢函数展开式，《割圆密率捷法》第三、四卷用全书主要篇幅计算“通弦八题”与“正矢八题”，各算出 24 个高位系数；在对弦、矢函数展开式的“法解”中又各分为 8 组，作为数据，导出了这两个公式。以通弦展开式的证明为例，共用了约 2.5 万字，令人叹为观止(见本章第六节)[①]。

当然，明、陈等人用的是外推法，与现今的证明有别，而且现在用简单的方法就能解决，证明也不是越长越好。但他所作的尝试，证明了认为“中国传统数学没有证明”是没有根据的。

8. 提出“形数相生”的理论，“堪与笛卡儿轫解析几何媲美”。

《割圆密率捷法》数学理论的基础之一是“形数相生”。线段之“形”，必生相应之“数”，将它称做“率”，从几何关系中抽取出来，推演下去，变成了代数关系。因此选之“形”各具三角学意义（弦、矢），所以其中又蕴含着函数关系。这里形与数可以相生、形与数存在对应的观点，在中国数学史上是解析几何学的

[①] 方匀.《割圆密率捷法》[A].中华传统数学文献精导读[C].湖北教育出版社,1999. 485-492.

先声。

李俨先生指出："明安图以三十年之精思，始撰成《割圆密率捷法》，以解析'九术'，并由连比例三角形入手。此数与形的结合，堪与笛卡儿韧解析几何媲美"[①]。

9. 提出曲线和直线在无穷分割的条件下可以达到同一的极限理论。

在《割圆密率捷法》的卷三的"弧背求通弦率数法解"节节首陈际新写道："弧，圆线也；弦，直线也；二者不同类也。不同类虽析之至于无穷不可以一之也。然则终不可相求乎？非也。弧与弦虽不可一之，苟析之至于无穷，，则所以不可一之，故见矣。得其不可一之，故即可因理以立法是，又未尝不可以一之也。"这种曲直异同说，在当时是难能可贵的数学思想，在从有限数学走向无限数学时，必然要遇到两者"不可一之"，又"必可一之"的问题，《割圆密率捷法》出色解决了它，在具体证明中，事实上大量运用了下述重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

另外，在"弧背求通弦率数法解"中陈际新多次写道："是某某之数（即极限）不改，奇零之差愈推愈微"，在公式中《割圆密率捷法》把 "奇零之差"舍弃，达到了最终的极限值（见本章第七节）。

10. 为减少计算量采用了近似计算简算法。

例如，两高位数值相除，先截去每个数尾数若干拉，只保留前边若干位再除；为保证计算结果的精密度，入算数据要多取一两位等。《割圆密率捷法》多次应用同角、互余三角函数公式使运算简化，并引入多种避免较大乘大除的三角函数简算公式（见本章第四节）。

应该说，罗见今对《割圆密率捷法》数学成就和数学思想的概括非常全面。他的观点中包含了李俨等人的观点。我们也大体同意罗见今的观点，并在每个方面做了补充说明。不过，我们认为第 8 个方面值得讨论。数形结合确实是《割圆密率捷法》中最重要的数学思想，但明安图、陈际新等人与笛卡尔和我国传统数学的数形结合的几何代数化思想有很大的区别。他们走了是一条相反的道路。他们采用了西方传统的古希腊代数几何化思想。从代数的观点看，"弧背求通弦"与"弧背求正弦"这两个公式的等价性是非常明显的，但其几何意义有区别，而

---

① 李俨.明清算家的割圆术研究[A].中算史论丛[C].李俨 钱宝琮科学史全集[Z].辽宁教育出版社,1998.297.

明安图、陈际新等人还是把它们作为两个不同的公式。对这些公式的证明，明安图、陈际新等人用的是几何方法。在当时，我国传统先进的宋元数学事实上已经失传，解析几何还没有传入我国。明安图、陈际新等人是以《几何原本》中的知识完成“杜氏九术”的证明的，这对纠正我国传统数学重算不重证的倾向有重大的意义，但是，矫枉过正，以这种思想方法解决问题必然离解析几何的发明越来越远。明安图、陈际新等人后来者的工作表明了这一点。

《割圆密率捷法》取得的数学成就已经逐渐得到了世人的公认。但《割圆密率捷法》的缺点也是非常明显的。

1.与西方同期数学成就相比，《割圆密率捷法》的差距是明显的。

《割圆密率捷法》采用的数学工具是初等数学工具。而在此前，西方的牛顿和莱布尼茨等人已经创立了微积分。微积分的发明标志着数学史上的一场深刻革命已经完成。西方的数学家们开始用比较先进的工具研究数学。牛顿在求反正弦函数的级数展开式时运用了他发现的二项式定理和积分法，在求正弦函数的级数展开式时运用了级数回求法。伯努利也早在明安图和陈际新之前运用了类似于《割圆密率捷法》中的方法求得了正弦等函数的幂级数展开式。在十八世纪初，英国人泰勒(B. Taylor, 1685-1731)和麦克劳林(C. Maclaurin, 1698-1746)发现了求函数的幂级数展开式的一般方法，一揽子解决了函数的幂级数展开问题。所有这些成就，都在《割圆密率捷法》成书之前已经完成。在《割圆密率捷法》成书之时的西方，在伯努利家族和欧拉、拉格朗日(Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813)等大师的推动下，数学分析的各个分支都得到了全面的发展，带动着整个数学普遍繁荣。世界其它地方的数学都被远远地抛在了后面。

2.没有采用先进的数学符号。

《割圆密率捷法》没有采用先进的数学符号系统，所有的证明和算式都是用文字叙述的。比如“圆径求周”术用现代数学符号表述就是公式(i)，非常简洁明快，而在《割圆密率捷法》中却用了数百个汉字表述，显得非常冗长、繁琐。没有采用先进的符号，也是我国传统数学的一个痼疾。

3. 提出数学问题的意识不强。

问题是数学发展的心脏。著名数学家希尔伯特曾说过：“正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题。正是通过这些问题的

解决，研究者锻炼其钢铁意志，发现新方法和新观点，达到更为广阔和自由的境界。”[①]我国传统数学并不是没有提出问题和解决问题，但这些问题大多与实际活动联系在一起，很少有“三大几何作图难题”、“《几何原本》第五公设的证明”之类从数学自身引出并对整个数学产生重大影响的问题。三角学传入我国，弦弧互求、矢弧互求等本应自然而然成为问题。但这些问题在“杜氏三术”传入我国后才引起数学家们的主意。可以说，这是西方人在出题给我们作。不善于提出有重大意义的问题，是我国数学家（包括福建传统数学家们）在思想方法方面的重大缺陷之一。

《割圆密率捷法》一书在数学思想上给人的经验和教训是深刻的，这在科学思想的交流方面也有所体现。《割圆密率捷法》一书是中国人在没有外界依傍的情况下，独立完成的作品。这一个侧面反映了中国数学家顽强的钻研精神和中国人不乏聪明才智，另一个侧面也反映了当时我国与外界数学交流的乏力。雍正登极（1723年）之后，他大力驱逐传教士，实行闭关锁国的政策，西方先进的科学和技术的输入渐渐趋缓。中国数学家们无法接触到数学发展的前沿，只能在低水平的情况下研究。《割圆密率捷法》，作为这个时期的数学著作中的代表作，不仅全面地反映了当时我国数学的最高水平，而且还从一个侧面反映了当时的社会风气和国家的科学政策。李迪先生曾说过：“在中国历史上缺少鼓励人们学习和吸收外国数学成果的政策。”[②]在当时，这种情况尤甚。当时大多数国人对我国数学的全面落后还不自知。罗士琳在《割圆密率捷法》后跋中称：“近年中法盛行，……故中学兴而西人退。”就在《割圆密率捷法》正式出版的一年后（1840年），鸦片战争爆发，英国人用坚船利炮敲开了我国的大门。

① 希尔伯特.数学问题[A].数学史译文集[C].上海:上海科学技术出版社,1981.60.

② 李迪.中国数学史研究的回顾和展望[A].林东岱,李文林,虞言林.数学和数学机械化[C].济南:山东教育出版社,2001.409.

第六章 庄亨阳与《庄氏算学》

在清朝初年，八闽大地上出了一位为官清廉、政绩卓著的好官庄亨阳。庄亨阳在政务之暇，坚持学习数学，研究数学，并把数学运用于自己的工作实践中去，为治水工作作出了杰出的贡献。他的事迹将永远被后人怀念。他的数学著作被后人尊称为《庄氏算学》。庄亨阳的数学成就已被载入中国古代数学史册。李俨先生著的《中国数学大纲》和钱宝琮先生主编的《中国数学史》这两部权威的中国数学通史著作都有专段介绍庄亨阳和《庄氏算学》。以后也有对庄亨阳和《庄氏算学》的零星研究[①]。本章在此基础上对庄亨阳的数学成就和数学思想作进一步的发掘。

第一节 庄亨阳生平和《庄氏算学》的出版

庄亨阳（1686～1746年），字元仲，号复斋。南靖县龟山(今南靖县奎洋镇)人。庄亨阳于《清史稿》、年代稍晚的《漳州府志》和《南靖县志》都有传[②]。

庄亨阳出身贫寒，父庄光泽，号璞园，以塾师为业；母叶梦坡，识字，善教子，劝导亨阳交友识善恶。弟庄亨德，以孝友闻名。庄亨阳19岁中秀才，26岁中举人，33岁中进士。

雍正元年(1723年)三月，庄亨阳出任山东莱州潍县知县。母病故，翌年三月才回家服丧。服满后，在漳州芝山书院任教。

乾隆元年(1736年)由大学士杨文定推举，庄亨阳进京担任国子监助教。在任此职的这几年，对庄亨阳的数学学习和数学研究是非常重要的。庄亨阳有机会接触到皇家数学书籍，特别是《数理精蕴》。《数理精蕴》对庄亨阳的影响

[①] 乐爱国.庄亨阳及其《庄氏算学》[A].周济.福建科学技术史研究[C].厦门:厦门大学出版社,1990.241-245.

[②]“庄亨阳生平”参考了下述史料：1、郑丰稔.南靖县志·列传·庄亨阳（卷十八）（民国稿本）[M].福建省南靖县地方志编纂委员会整理.1994.622~625. 2、中国人民政治协商会议漳州市委员会公文，见：http://hszz.zhangzhou.gov.cn/ShowArticle.asp?ArticleID=1710 3、赵尔巽.清史稿,卷480,第43册[M].北京:中华书局,1977.13139.

是非常大的。乾隆四年(1739年)，庄亨阳调任吏部验封司主事，因鲠直敢言，对不合规格的诏敕直接封驳退还。有人因此荐他任监察言官，未果。

乾隆六年(1741年)夏，庄亨阳受任汉阳府同知；十月改任德安府同知；十一月升任徐州知府(次年四月到任)。庄亨阳任徐州知府3年，遇到3次洪水、两次饥荒，为办理防洪赈灾急务，他经常寝食俱废，结果事事妥帖，百姓称颂。

乾隆九年(1744年)，庄亨阳升任江南按察副使，分巡淮安、徐州、海州。这一带是历来水患严重的地区。他一到任，即主持整修河防工事，并改革一些不合理的陈规旧例。他发动民众在徐州修筑南四湖、黄淮堤防，修建金钩、境山等数十座水闸，清理黄、沭、濉、汴等河道沙障，以求扩大蓄水量并及时而顺利宣泄洪水。

乾隆十一年(1746年)正月，庄亨阳因劳致疾，病殁于淮徐海道任所，终年60岁。同年三月，遗体归葬于故乡南靖县龟山埔山后垄(在今奎洋镇上洋村)。墓碑为文华殿大学士、吏部尚书加太子少师蔡新所题，礼部侍郎、三礼馆总裁方苞作墓志铭。庄亨阳有子二人，孙子三人。长子名庄脩，次子名庄撰。

庄亨阳的遗著有《秋水堂遗集》，内有文集、诗集、《河防算法》和《历法问答》等。《庄氏算学》原名《河防算法》，收入《四库全书》时改名。《庄氏算学》[1]除了四库全书版之外，据李俨先生考证，还有两个版本：其一为道光二十八年（1848年）重刊本，共八册，作《秋水堂算法》；其二为光绪十五年（1889年）庄亨阳的后人庄翥轩刊的《秋水堂遗集》本，作《秋水堂算法》，不分卷。后版李俨先生生前有藏本。李藏本目前被中科院自然科学史研究所图书馆收藏。此外，《庄氏算学》的《几何原本举要》还有单行本[2]。

第二节　《庄氏算学》内容概述（上）

《庄氏算学》分八卷，下面我们逐卷简要要介绍和剖析其内容。

《庄氏算学》卷一：梅勿庵开方法

梅勿庵，即梅文鼎。依据本卷的标题，本卷的内容取自《梅氏历算全书》。全卷共分五条：“一平方”、“一立方”、“一平方带纵”、“一立方带纵”、“用筹法”。

---

[1] 本书引用的《庄氏算学》为四库全书版。

[2] 李俨.近代中算著述计[A].中算史论丛第二集[C].李俨 钱宝琮科学史全集第六卷（Z）.沈阳:辽宁教育出版社,1998.607~608

本卷其内容为筹算开方法。

在“一平方”条中，庄亨阳首先指出了开平方法的算理：

平方四边相等，今所求者：其一边之数. ……初商不尽则倍初商之根为廉法，除之得两廉，又以次商为隅法，自乘得隅，以补两廉之空而成正方形. 是谓次商，又不尽则合初商次商得数倍之为廉法，除之得次两廉. 又以三商为隅法. 自乘得隅，以补次两廉之空成正方形. 自此而四商五商仿此加之能事毕矣.

在“算经十书”中，《九章算术》“少广章”记载了世界上最早的开平方法和开立方法，《九章算术》用“议得”、“实”、“法”、“中行”、“借算”等概念表述开平方的过程。在《孙子算经》中，开始运用后来普遍使用的 “商”、“廉法”、“廉”、“隅”、“实”等概念。在《庄氏算学》中，庄亨阳也采用了类似的概念。庄亨阳把这些概念和图形结合起来，清楚地表明了开平方的算理。用现代数学语言，可以将此表述如下：

已知 $x^2=b$，求 x.

设a_1为初商，如果$b-a_1^2=0$，则表明开方已经完成。否则有$b-a_1^2>0$，设廉法为$2a_1$，则两廉为$2a_1a_2$，其中a_2为次商，又设隅法为a_2，则隅为a_2^2，显然$a_2^2+(a_1^2+2a_1a_2)$为一完全平方式，其几何意义为边长a_1+a_2的正方形的面积。如果 $b-[a_2^2+(a_1^2+2a_1a_2)]=0$，则表示开方已经完成。否则，把$a_1+a_2$当成初商，又重复前面的过程求得三商$a_3$、四商$a_4$、五商$a_5$等等。

在介绍完开平方的算理之后，庄亨阳又具体指出了初商、次商、三商等的定位技巧。这种技巧实质上与今天笔算开平方的技巧是一致的。

在“一立方”条中，《庄氏算学》首先指出了开立方的算理。

平方则一方，次合两廉一隅以成方面. 立方则一方，次有三平廉以辅于方之三面，又有三长廉以补三平廉之隙，又有小方隅以补三平廉之隙. 推之三商四商皆然，而方体成矣.

用现代数学语言，这可表述如下：

已知 $x^3=b$，求 x.

设a_1为初商，a_2为次商，三平廉为$3a_1^2a_2$，三长廉为$3a_1a_2^2$，显然（$a_1^3+3a_1^2a_2+3a_1a_2^2+a_2^3$）为一完全立方式。把$a_1+a_2$当成初商，仿此可求得三

商 a_3，重复上述过程可求得四商 a_4、五商 a_5 等等。

在介绍完开立方的算理之后，庄亨阳又正确地指出了开立方时各商的定位技巧。

“在一平方带纵”条中，《庄氏算学》介绍一元二次方程 $x^2+ax=b(b>0)$ 的正根的数值解法。此问题的几何背景是：一个长方形，长比宽长若干，已知其面积，求长方形的长宽。

“在一立方带纵”条中，《庄氏算学》介绍了如下两种类型的一元三次方程正根的数值解法：

（1） $x^2(x+a)=b(b>0)$，（2） $x(x+a)(x+b)=c(c>0)$

前种类型在《庄氏算学》中被称为“带一纵”，后种类型被在称为“带二纵”。

前者相当于几何问题：一个长方体的宽与高相等，长比宽长若干，已知长方体的体积，求这个长方体的长，宽、高。

后者的几何背景是：一个长方体，长比高长若干，宽比高长若干，已知长方体的体积，求长方体的长、宽、高。

《庄氏算学》把数形结合起来，正确地给出了“平方带纵”和“立方带纵”两种问题的数值解法。当然，数值法开“带纵平方”和“带纵立方”并不是梅文鼎首创的。在《缉古算经》中，王孝通已经会用数值法解 “带纵立方”问题。

在本卷最后一条“用筹法”中，《庄氏算学》根据前面给出的开方算理，详细地介绍了开方的用筹法。《庄氏算学》本卷中的运算工具“筹”并不是指我国古代的算筹，而是指西方传入的纳皮尔筹(Napier’ s bones)。纳皮尔(John Napier 1550-1617)是英国著名的数学家，对数的发明者。

《庄氏算学》卷二：《几何原本》举要

“《几体原本》举要”是《庄氏算学》中篇幅最长的卷，约占全书篇幅的三分之一。本卷的主要内容是几何，此外还有少量的算术等方面的内容。

一、“《几体原本》举要”中的几何学

“《几何原本》举要”中的几何学知识由数十条组成给出，论述平面几何、立体几何、几何作图、比例、面积体积计算等。每条相当于数学中的定义、公理、公式等。这些定义、公理、定理排列的先后顺序基本上符合几何学的逻辑结构。

庄亨阳对大多数定理并没有给出证明。下面我们选录本卷前几条的原文，对其它条如果没有特别说明则用现代形式表述出来。

1. 平面几何部分

第一条为角的定义：

凡角度皆起于圜心，而见于圜界。圜不论大小，俱有三百六十度之数。度有六十分，分有六十秒，秒有六十微，微有六十纤。自此以下又有不尽之数分之。故执有度之圜界，为凡角大小之规也。

第二条为平行线的性质：

二平行线若作一斜线交加于上，则二横线内外所成之二角俱为相等。

对此条，庄亨阳作了补充说明，他指出：两条平行线被一直线所截，所成的八个角中，四个锐角都相等，四个钝角都相等。此外他在本条中还指出对顶角相等，补角的定义等。

第三条为三角形内角和定理：

凡三角形之三角相并必与二直角相等而具半周之度。

以上三条我们给出了原文。其它条相当于：

三角形内角和定理的推论：三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角之和。

两个三角形全等的判定定理（SAS)：两个三角形，如果有两条对应边分别相等，并且这两边所夹的角相等，那么这两个三角形全等。

全等三角形的判定定理（SSS)：两个三角形，如果三条对应边都分别相等，那么这两个三角形全等。

这全等三角形的判定定理（ASA)：两个三角形，如果有两个对应角分别相等，并且这两角的共边也对应相等，那么这两个三角形全等。

等腰三角形的性质：等腰三角形的两底角相等。对此定理，《庄氏算学》作了简要证明。

不等边三角形的边角关系：在一个三角形中，大边对大角、小边对小角。

一三角形必有二锐角。对此定理，《庄氏算学》用反证法作了简要证明。

垂线段最短。

三角形的两边和大于第三边，对此定理，庄亨阳用公理“两点之间线段最短”

作了证明。

四边形的分类。四边形分成五种：四方形（正方形）、长方形（矩形）、斜方形（菱形）、长斜方形（平行四边形）、无法形（普通四边形）。

平行四边形的两组对角相等。

平行四边形的一对角线将此平行四边形分成两个全等的三角形。

平行四边形的两个对角线互相平分。

过平行四边形对角线中点的直线将平行四边形分成两个全等形。

过平行四边形的对角线上任一点作平行于四边形两组对边的二直线，将原平行四边形分成四个小平行四边形。

夹在两条平行线之间同底的两个平行四边形的面积相等。

多边形的内角和定理。对此定理《庄氏算学》给出了证明。

切线的定义，两圆相切的定义。

弦的定义，弧的定义。

圆周角的定义。庄亨阳称圆周角为“圆分内角”或“对弧立角”。

分圆面形的定义。庄亨阳称弦、与过弦的端点的两半径所成的三角形为“分圆面形”。

边圆上一点作过此点的半径的垂线必在圆外。

过圆心作弦的垂线平分弦，此定理，《庄氏算学》给出了证明。

等弦所对的弧，弦心距相等。

正弦的定义。

同弧所对的圆心角为圆周角的2倍。对此定理，庄亨阳给出了证明，在证明时庄亨阳对各种情形作了分类讨论。

同弧所对的圆周角相等。

如果一弧所对的圆心角是另一弧所对的圆周角的2倍，则这两弧相等。

一劣弧所对圆周角是锐角，一优弧所对的圆周角是钝角。

外切多边形和圆的内接多边形的定义。

圆的外切多边形的周长大于圆的内接多边形的周长，对此定理，《庄氏算学》给出了证明。

圆的外切多边形的面积等于一直角边为圆的半径，一直角边为多边形的周长

的直角三角形的面积。对此定理，《庄氏算学》也给出了证明。

如果圆的内接多边形各边的边心距相等，那么其面积等于一直角边等于边心距，一直角边等于此多边形周长的直角三角形的面积。

圆的面积等于一直角边为圆的半径，一直角边为圆的周长的直角三角形的面积。对此定理，《庄氏算学》用前面的两个定理给出了一个粗略的证明。

圆的内接多边形或圆的外切多边形其边数越多，则其周长与圆的周长的差越小。对此定理，《庄氏算学》用“割圆术”给出了一个粗略的说明：

如自函三边而为六边，六边而为十二边、十二边而为二十四边 。无论内外愈近圆界度数也。试设一函于圜九十六边形，又设一函圜九十六边形，而作一圜，若将函圜形作一千五百六十二分，又将他形照此所分之度分之，则函于圜形仅得一千五百六十一分矣。而圜界度大于所函之众界，小于函圜之众界。必得一千五百六十一分余，其圜周中心径线必得四百九十七分，若即小数算之，将圜界作二十二分，则中心径线必得七分余，故在圜界上可得直线之度，在直线上亦可得圜界之度。

对此条现释如下：

设一圆，其外切正 96 边形周长 $L=1562$，则其内接正 96 边形周长为$l=1561$。因为圆的直径为 $D=497$，根据前面的定理$l<C<L$，C 为圆的周长，由此可得圆周率的不足近似值为 1561/497，过剩近似值为 22/7.

一多边形其周长与圆相等，则圆的面积大于此多边形的面积。对此定理，《庄氏算学》作了粗略的证明。此定理是等周定理的特殊情形。等周定理是：在周长为定值的封闭曲线围成的平面图形中，圆的面积最大。

2. 立体几何部分

两平行平面的定义。

两平面互相垂直的定义。

构成一个立体角的所有平面角的和小于二直角。庄亨阳对此定理作了说明。

构成一个立体角的三个平面角中的任意两个角的和大于第三角。此定理应排在上条定理的前面。从逻辑上，此定理是上条定理的依据。

直线垂直于平面的定义。

一直线与交于一点的若干直线垂直，则这若干直线在同一平面上。

垂直于同一平面的二直线互相平行。庄亨阳对此定理给出了证明。

二平行直线上各自两点的连线与这二平行线都在同一平面上。

一直线垂直于二平面，则这二平面平行。对此定理，庄亨阳给出了证明。

两平行平面被第三条平面所截，得到的两直线平行。

各种体的定义：圆体（球）、多面体、曲体、杂体、平行面体、长圆体（圆柱）、尖瓣体（棱锥体）、尖圆体（圆锥）等的定义。

球、圆柱、圆锥等为旋转体。

全等体、等积体、相似体的定义

3. 作图部分

过一点作已知直线的垂线

分圆周为 360 等份

已知一边，用量角器作 30^{0} 角的另一边

过直线外一点作已知直线的平行线

已知正方形的一边，求作此正方形

过直线外一点作圆的切线

作圆的内接正多边形和多切正多边形

已知一三角形和一圆，求作另一三角形，相似于已知三角形，内切圆为已知圆。

作直角三角形的内接正方形（正方形的一角与直角三角形的直角相同）。

作一正方形，其对角线为已知线段。

作正五边形。

n 等分已知线段。

已知线段 a，b，求作其比例中项 $c=\sqrt{ab}$.

已知线段 a，b，c，求作 d，使得 a:b=c:d.

已知长方形，求作与其等积的正方形。

4. 比例部分

比例只能在同类量之间进行。庄亨阳认为“面比面、体比体、线比线，不同者不相谋也”。

比例的各种概念：比例、率、率数、前率、后率等的定义。在 a:b 中，a 和

b 都称为率或率数，其中 a 为前率，b 为后率。

同理比例的定义：如果 a:b=c:d，则 a:b 和 c:d 为同理比例，其中 a、b、c、d 分别称为一率、二率、三率、四率。

同理比例等式两边的对应分数相等。即如果 a:b=c:d，那么 a/b=c/d.

比例大小的定义。

连比例的定义和性质，a:b=b:d=c:d=d:e=e:f 为一连比例，则 a:c=b:d=c:e

a:d=b:e=c:f　　a:e=b:f 等等。

同角所对的两弧之比等于这两弧所在的圆的周长之比。

比例的“转理”性质：如果 a:b=c:d 那么 a:c=b:d

比例的“分理”性质：如果 a:b=c:d 那么，(a-b)：b=(c-d):d

比例的“合理”性质：如果 a:b=c:d, 那么 (a+b):b=(c+d):d

比例的“隔位”性质：如果 a:b=c:d=e:f=g:h 那么 a:d=c:f=e:h

“错综”比例，即比例的基本性质：a:b=(an):(bn) 或 a:b＝(a/n)=(b/n)

5. 几何的其它内容

本部分的内容很杂，主要为面积公式、体积公式的推导。其中不乏精彩之处，如椭圆面积公式的推导、球的表面积公式的推导等等。

（1）　椭圆面积公式的推导

庄亨阳首先给出椭圆的面积公式：

有一平面鸭卵形，其大径度与圆径若等．则鸭卵形之平面积与圆面积之比同于鸭卵之小径与大径之比例也．

设一椭圆大小径分别为（2a），(2b)，则以（2a）为直径的圆的面积为 πa^2。庄亨阳认为 $S/(\pi a^2)=(2b)/(2a)$ （其中 S 为椭圆的面积），由此可得 $S=\pi ab$，可见《庄氏算学》给出的椭圆的面积公式是正确的，对此公式，庄亨阳用广义祖暅原理[①]作了如下的推导：

置上述椭圆于圆内，其中椭圆的大径与圆直径重合，则任一平行于小径的直

[①]用数学分析语言表述，祖暅原理相当于：如果 f(x)=g(x)，则 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$；广义祖暅原理相当于：如果 f(x)=kg(x)，则 $\int_a^b f(x)dx=k\int_a^b g(x)dx$．广义祖暅原理又称卡瓦列里（Bonaventura FrancescoCavalieri，1598—1647）原理。

线截椭圆所得的线段的长度与该直线截圆所得的线段的长度所成的比例，都和椭圆的小径与圆的直径所成的比例相等。再运用广义祖暅原理即可得到椭圆面积公式。

（2） 球的表面积公式的推导

庄亨阳作了如下的推导：

有一尖圆体，又一半球体，苟尖圆体底径与半球体径度等而尖圆体高度与半球体半径又等，则此尖圆体为半球体积之一半也。盖尖圆为长圆三分之一，而半球为长圆体三分之二，则尖圆为半球之半也。又球体径度与尖圆体底径若等，而球体半径与尖圆体高又等，则此一球体之积当四尖圆体之积也。盖将尖圆加一倍，则与半球等；合四尖圆，则与全球等也。有一球体，又一尖圆体，苟尖圆体底面积与球体外面积若等，而尖圆体高度与球体半径又等，则此两体之积为等也，何也？将球体从外面至心分为千万尖体，此所分千万尖体之底积必与球外面之总积等，亦即与尖圆体之底面积等也。又原尖圆体之高与所分千万尖体之高既等，则一尖圆体之积与所分千万尖体总积等也。如是其所分千万尖体之总积既与原球之积等，则此尖圆体之积必与此球体之积之等可之矣。

由此可得：“凡有一球体，苟以此球体之半径作一圆，则所作之圆之面积于此球体外面积为四分之一也。”

由于没有符号代数，庄亨阳的表述显得特别冗长。用现代符号代数，庄亨阳的推导相当于：

设一圆锥体，底面半径为 r, 高 h=r, 则其体积 $V_1=\dfrac{\pi r^3}{3}$，又设一半球，半径为 r, 则其体积 $V_2=\dfrac{2\pi r^3}{3}$，又设一球体，半径为 r，则其体积 $V_3=\dfrac{4\pi r^3}{3}=2V_2=4V_1$.
设球体的表面积为 S. 把球面分成无数个小面 ΔS_n，这样可以把球体分成无数个小锥体，其底面分别为 ΔS_n，高为球体的半径 r.

$$\because V_3=\lim_{\Delta S_n\to 0}\sum_1^{\infty}\frac{\Delta S_n\cdot r}{3}=\frac{r}{3}\lim_{\Delta S_n\to 0}\sum_1^{\infty}\Delta S_n=\frac{r}{3}S=\frac{4\pi r^3}{3}$$

$$\therefore S=4\pi r^2$$

（3） 三角形内切圆半径的求法

庄亨阳给出了如下的求法：

三较连乘者，求三角容圆之半径也。三较者，三边与半总相较之余也。三较连乘所得之数乃容员半径自乘又乘半总之数也。

设三角形三边分别 a，b，c，内切圆半径为 r。则“三较”分别为(p-a)、(p--b)、(p-c)其中 p=(a+b+c)/2 为半总，则有r^2p=(p-a)(p-b)(p-c).

此条在第八卷给出了证明。

结合第三卷的“锐角、钝三角形容圆面式”子条给出的三角形的内切圆的直径公式可以推知 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (其中 S 为三角形的面积)。这就是著名的海伦公式。

（4） 测距仪的制作方法

庄亨阳介绍了把普通量角器改装一种测距仪的制作方法。这种测距仪是既可以测量角度，从而可利用八线表，根据平面三角学知识测量距离；也可以作为一矩，根据相似三角形的性质进行测量。

此外，在本部分庄亨阳还正确地推导出了球的体积公式、椭球的体积公式，并指出了利用相似多边形性质绘制地图的方法等等。

二、“《几何原本》举要”中的非几何内容

1. 等差数列

庄亨阳对等差数列的讨论非常充分，他给出了等差数列的定义和若干性质。

在《庄氏算学》中等差数列被称为“平加众数”首项被称为“小数”，公差被称为“平加数根”，末项被称为“大数”，项数被称为“位数”，通项和被称为“众数之总数”。

设$\{a_n\}$为一等差数列， d 为公差，s_n为通项和，《庄氏算学》给出了等差数列的如下性质：

$$a_i = a_j+(i-j)d=a_j-(j-i)d$$

$$a_i+a_j=a_{i+k}+a_{j-k}$$

$$a_i=(a_{i-1}+a_{i+1})/2$$

$$s_n=n(a_1+a_n)/2$$

$$s_n=n\,a_{\frac{n+1}{2}} \quad (n\text{ 为奇数})$$

$$\sum_{1}^{n}(2i-1)=n^2$$

$$\sum_{1}^{n}(2i)=n(n+1)$$

$n=(a_n-a_1)/d+1$

$a_n=a_1+(n-1)d$

$a_1=a_n-(n-1)d$

$d=(a_n-a_1)/(n-1)$

2. 最大公数的求法

《庄氏算学》称之为："凡不等两数，求一数可以度尽之法"《庄氏算学》用辗转相减法求两个自然数的最大公约数，与《九章算术》的最大公约数的求法相同，《九章算术》称两个自然数的最大公约数为等数，而在《庄氏算学》则称之为"转减之数"或"纽数"。

3. 完全数的定义

《庄氏算学》给出了两例完全数，完全数被庄亨阳称为"可以度尽大数"。庄亨阳指出："凡可以度尽大数之众小之数相合于此，加数根一所得之总数与所度之大数等也"。庄亨阳指出 6 和 28 就这样的"大数"。

4. 不定方程组

《庄氏算学》录有一题和解：

钱百文买果百，梨一颗钱三文，柑一颗钱二文，橄缆七颗钱一文。算得梨四颗钱十二文，柑四十颗钱八十文，橄榄五十六颗钱八文。

此题有两解。《庄氏算学》只给出了其中的一解。另一解为梨 17 颗钱 51 文，柑 20 颗钱 40 文，橄榄 63 颗钱 9 文。此题和《张邱建算经》的"百鸡题"相类似。

《庄氏算学》卷三"勾股测量"

本卷的主要内容为测量问题，此外还有算术问题和几何杂题。

一、测量问题

1. 立表杆测法

本类测量问题有测高、测远各一题。下面是庄亨阳给出的测高题和解法

法以距旗杆三丈处立一表杆高四尺，向前又立一表杆高八尺，看两表端与旗杆顶齐，量两表间相距五尺。乃以五尺为一率，前表八尺内减后表四尺余四尺为二率，距旗杆三丈为三率，求得四率二丈四尺，加入后表四尺得二丈八尺即旗杆之高也。

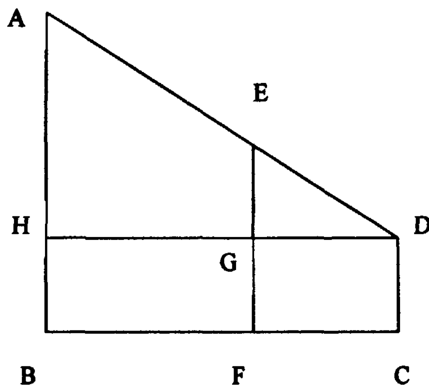


图 6-1

此题相当于：如图 6－1，已知 AB⊥BC 于 B，EF⊥BC 于 F。DC⊥BC 于 C。AED 在一直线上，DC=4，EF=8，FC=5，BC=30，求 AB。

庄亨阳给出的解法相当于：过 D 作 DH||BC，DH 交 EF 于 G，DH 交 AB 于 H。

∵△EGD∽△AHD　∴DG：EG=HD：AH

又∵DG=FC=5，EG=EF-DC=4，HD=BC=30

∴AH＝EG・HD/ DG=24　　　又∵HB=DC=4

∴A=AH+HB=24+4=28

测远题和测高题一样也是运用相似三角形的对应边成比例性质解决的。

2. 重表测量术

此即重差术。庄亨阳给出了数例，请看其中的两例。

[例 1]设塔一座，欲知其高，用相等两表测之.

法先立一表，杆比人目高四尺，人离表杆六尺看塔顶与表端齐。又自前表退后六丈，复立一表，杆亦比目高四尺，人离表杆八尺，看塔顶与表端齐。乃以前表距分六尺与后差距分八尺相减余二尺为一率，表比人目高四尺为二率，两表相

距六丈为三率，求得四率十二丈，加表比人目高四尺，共十二丈四尺，即人目以上之高，再加人目距地之尺寸，即塔顶距地平之高。如求塔距前表之远，则以两表距分相减之二尺为一率，前表距分六尺为二率，两表相距之六丈[①]为三率，求得四率十八丈即塔距前表之远，再加六丈即塔距后表之远。

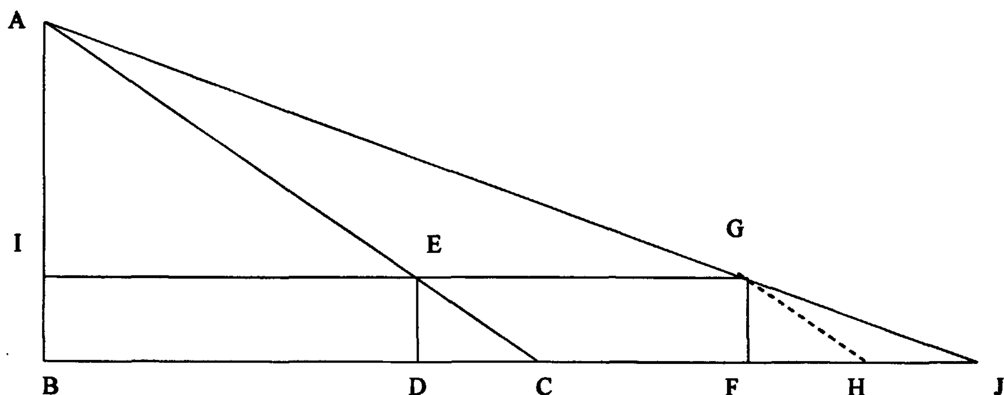


图 6-2

此题相当于：如图 6－2。已知 Rt△ABJ，∠B 为 Rt，ED=GF=IB=4,ED⊥BE 于 D，I 在 AB 上，G 在 AJ 上，AE 交在 BJ 于 C，CD=6，DF=60，FJ=8，求 AB、BD、BF。

《庄氏算学》给出了的解相当于:在 FJ 上取 FH=6，连结 GH 则 HE=FJ-FH=2

∵△GHJ∽△AEG　　　∴HJ：GH=EG：AE

又∵△GHF≌△ECD∽△AEI

∴GH：FG=AE：AI

∴HJ：FG=EG：AI

∴AI= FG・EG/ HJ= FG ・DH/ HJ=120

AB=AI+IB=120+4=124

另外不难得出 HJ：DC=EG：IE

∴BD=IE= DC・EG/HJ=180

∴BF=BD+DF=180+60=240

例 1 中用的重表为长度相等的两表，下例为不等长的两表。

[①] “丈”原书为“尺”。

[例 2]设楼一座，欲知其高以不等两表测之。法先立一长表，比人目高六尺，人离表五尺四寸看楼脊与表端齐。又退后二丈立一短表，比人目高四尺，人离表六尺四寸，看楼脊与表端齐。乃以前表比人目高六尺为一率，前表距分五尺四寸为二率，后表比人目高四尺为三率，求得四率三尺六寸为 前表与后表同高所得之距分。爰以三尺六寸与后表距分六尺四寸相减余二尺八寸为一率，后表比人目高四尺为二率，前表距分五尺四寸内减三尺六寸，余一尺八寸，与两表相距之二丈相减余一丈八尺二寸为三率，求得四率二丈六尺，加表比人目高四尺，共得三丈，即人目以上之高，再加人目距地尺寸即楼脊距地之高。

庄亨阳的不等两表测高实质上利用相似三角形的性质，把前表转化成与后表等高从而利用上题的解法解决本题。

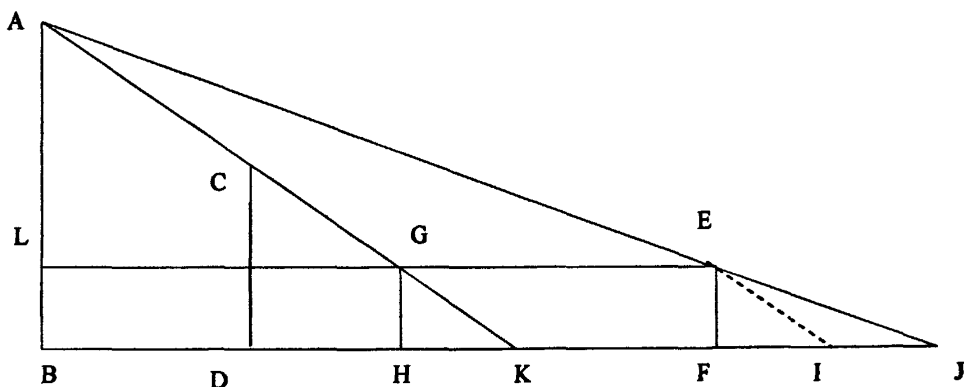


图 6-3

此题相当于：如图 6－3. 已知 AB⊥BJ 于 B，CD⊥BJ 于 D，EF⊥BF 于 F，CD=6，EF=4. 直线 AC 交 BJ 于 K，DK=5.4. 直线 AE 交 BJ 于 J，FJ=6.4，DF=20，求 AB。

《庄氏算学》给出的解法相当于：

过 E 作 EL//BC，EL 交 AB 于 L， EL 交 AK 于 G，作 GH⊥BJ 于 H，作 EI//AK，EI 交 BJ 于 BJ 于 I。

∵△CDK∽△GHK　　　　∴CD：DK=GH：HK

∵GH=EF　　　　∴HK=DK • EF/CD=5.4×4/6=3.6

∴HF=DF-DH=DF-（DK-HK）=20-（5.4-3.6）=18.2，利用上题的结果可求出：

AB=BL+LA=EF+EF • HF/(FJ-HK)=4+4×18.2/(6.4-3.6)=4+26=30

3. 矩度测量术

庄亨阳首先指出了“矩度”的构造：

矩度之制，必用正方。每边定一百分或二百分。横竖俱界线画成。小方分对中心所出线。两边安表，取中心安游表，定准坠线以成勾股。

庄亨阳非常重视“矩度测量”。他给出了6道例题。“矩度测量”利用相似直角三角形的性质进行测量。这在《周髀算经》就有讨论。《周髀算经》云：“平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远。” “矩度测量”术和《周髀算经》中的古术在原理上完全一致。

二、算术

1. 比例

本卷的“比例”与上卷的比例的含义是有区别的。上卷的比例为几何量之间的比例，本卷的比例为算术量之间的比例。

（1）“正比例”。“正比例”与今天的正比例的含义相同。“正比例”又被称为“异乘同除”。设a与b成正比例，已知a_1、b_1、a_2，庄亨阳正确地给出b_2的计算公式。

（2）“转比例”。“转比例”与今天的反比例的含义相同。“转比例”也被称为“同乘异除”。

（3）“正比例带分”，“转比例带分”。这两者实质上与“正比例”和“转比例”含义同，只是前二者比例各项的数字中有的是带分数。

（4）“合率比例”。庄亨阳称其法为“合两比例或合三比例，用一次除乘而得”。“合率比例”与今天的复比例的含义相同。

2. 其它算术杂题

本部分分成若干大条，每大条又分若干子条。

（1）“按分递折比例：二八差分、三七差分、四六差分、递折差分、加倍减半差分”。本条分成“二八差分”、“三七差分”、“四六差分”、“等差分”等子条

“二八差分”子条有3题，现看第3题，此题为本子条中最难的一题。

设有粮二千六百五十五石九斗，今甲乙丙丁戊五等户照二八递减纳之，甲户三十，乙丙四十，丙户五十，丁户六十，戊户七十，问各户该纳若干？

庄亨阳给出了如下的解法：设把粮平均分成若干份，丙户每户纳 32 份，乙户每户纳 128 份，甲户每户纳 512 份，由此可得：

甲户共纳：512×30＝15360 份

乙户共纳：128×40＝5120 份

丙户共纳：32×50＝1600 份

丁户共纳：8×60＝480 份

戊户共纳：2×70＝140 份

五等户共纳：15360+5120+1600+480+140＝22700 份

甲户每户纳：512×2655.9/22700＝59.904 石

甲户共纳：59.904×30＝1797.12 石

乙户每户纳：128×2655.9/22700＝14.976 石

乙户共纳：14.976×40=599.04 石

同理可计算出丙户、丁户、戊户每户纳粮数及这三等户的每等户共纳数。

用今天的数学符号表示，庄亨阳把“二八差分”分成两种：设a_1、a_2……a_{n-1}、a_n为“二八递减差分”，则$a_1:a_2=a_2:a_3=\cdots\cdots=a_{n-1}:a_n=8:2$；设$a_1$、$a_2$……$a_{n-1}$、$a_n$为“二递加差分”，则$a_1:a_2=a_2:a_3=\cdots\cdots=a_{n-1}:a_n=2$：8.

“三七差分”子条有四题，“三七差分”的含义与“二八差分”的含义大体相同，差别在于前者前后二率之比为 3:7 或 7:3，而后者前后二率之比为 2：8 或 8：2。庄亨阳给出的四例“三七差分”例题与前面例“二八差分”例题七基本类似，

庄亨阳在“四六差分”子条给出了 3 例，但最后一例按题意并不属于“四六差分”。实应属于后面的“等差分”子条。“四六差分”与前面“三七差分”、“二八差分”是相似的。

“等差分”子条共有七题，加上“四六差分”子条的最后一题，实应有八题。首先请看“四六差分”子条的最后一题：

设有熟稻七百九十九亩六分八厘，令甲、乙、丙三人挨次以十分之六收获．问各分收若干。

庄亨阳给出了如下的解法：

甲收：799.68×100/(100+100×0.6+100×0.6×0.6)=408 亩

乙收：799.68×（100×0.6）/(100+100×0.6+100×0.6×0.6)＝244.8 亩

丙收：799.68×(100×0.6×0.6)/(100+100×0.6+100×0.6×0.6)＝146.88 亩

再看本子条的第 6 题。

设有田一千二百亩，令甲乙丙丁四次挨次递减一半分种，问各种若干亩？

庄亨阳给出了如下的解法：

甲种：1200×8/(8+4+2+1)=640 亩。

乙种：1200×4/(8+4+2+1)=320 亩。

丙种：1200×2/(8+4+2+1)=160 亩。

丁种：1200/(8+4+2+1)=80 亩。

本子条所要解决的问题涉及到等比数列。对这类问题，《九章算学》衰分章也有初步的讨论。本子条前面的“二八差分”、“二七差分”、“四六差分”等三子条可以看作本子条的特殊情形。

（2）“按数加减比例”

本条分成“递加递减差分”、“超位加减”、“首尾互准”三子条

“递加递减差分”子条为等差数列的应用。共有六题，请看其中的三题。

[例 1]设有银九百九十六两，分给八人，自末名以上递加十七两，问首末二人各得若干？

[例 2]设有一百人，首名赏银一百两，以下递减五钱，问该银若干。

[例 3]设有粮一千一百三十四石，令五等户递减纳之，一等二十四户，二等三十三户，三等四十，四等五十一，五等六十，问每户的若干。

“超位加减”子条有 5 例。下面我们来看其中的 3 例。

[例 1]设有米二十四石，分与甲四分，乙五分，丙七分，丁九分。问各得若干？

[例 2]设有银七十两，买骆驼、马、骡各一匹，但知马比驼价为九分之四，骡比马价为九分之一。问各价若干？

[例 3]设有米五百三十五石，赏三等人。一等二十名，二等五十名，三等一百一十名。一等比二等每名加七斗，二等比三等每名加五斗。问各等每人得米若干？

“超位加减”子条要解决的问题也是已知几个数的和，和这几个数之间的关系，求这几个数的问题。不过，这几个数之间不成等比数列或等差数列。

以上两子条的例题，庄亨阳都给出了正确解法。在此不再详解。

“首尾互准”子条有 8 例。下面我们来看其中的三例。

[例 1]设有银二百四十两，赵钱孙李四人互相折半分之，但知赵多于李十八两。问各该银若干？

在这里，“互相折半分之”的意思是：前后三人，中间那个人分得的钱是前后两个人的一半。这样，这四个人分得的钱数构成了一个等差数列。根据此题意，庄亨阳给出了正确的解法。

[例 2]设有竹九节，截为九筒，递次长短不均。但知根底三节共盛米三升九合，梢上四节共盛米三升。问各盛米数？

[例 3]]设七人运粮，不言总数。但知第一人第二人共运二十三石七斗，第五第六第七共运二十六石一斗，其递加之数俱相等。问每人运粮若干？

例 2 和例 3 是同类型的题目。现看庄亨阳给出例 3 的解法：

第一人、第二人运粮总数的一半：$\frac{23.7}{2}=11.85$石。

第六人的运粮数：$\frac{26.1}{3}=8.7$石。

前后两人递加之数：(11.85-8.7)/(6-1.5)=0.7 石。

由此可得这七人个人的运粮数分别为 12.2 斗、11.5 斗、10.8 斗、10.1 斗、9.4 斗、8.7 斗和 8 斗。

“首尾互准”子条对等差数列的认识比第二卷有所深化。本子条的 8 个例题中就有 5 个与我们所录的 3 例中的后 2 例同类。有现代数学表述，这 5 例“相当于如下的问题：

设a_1、a_2……a_{n-1}、a_n为等差数列，已知 $b=\sum_1^j a_i$，$c=\sum_k^n a_i$。求公差 d 和a_1、a_2……a_{n-1}、a_n。

对这类问题，庄亨阳首先给出了 d 的计算公式 $d=(\frac{c}{n-k+1}-\frac{b}{i})/(\frac{k+n}{2}-\frac{i+1}{2})$，在求出 d 后，可以根据第二卷等差数列的有关公式，很容易地求出a_1、a_2……a_{n-1}、a_n。

三、几何杂题

本部分分成若干条。

“尖圆体”条给出了各种形状米堆的体积的计算方法。本条实质上给出了圆锥、半圆锥、四分之一圆锥、四分之三圆锥的体积公式，这四个公式分别计算尖堆、倚壁尖堆、倚壁内角、倚壁外角等四种形状的米堆。

“截积”条为平面图形的切割问题。在解本条的问题时，要求会全面应用上卷“《几何原本》举要”中的几何知识，要求会计算各种平面图形的面积，要求会开平方。

请看本条的“圆面截弧矢形求积”子条。此子条相当于问题：已知弓形的弦长和高，求其面积。庄亨阳给出了两种解法。

第一种解法相当于：先求出弓形所在圆的半径，再查八线表，计算出弓形的弧长，然后求出弓形所在的扇形的面积，此面积减去弓形的弦与两条半径为三边的三角形的面积，得到的差即为所求。

第二种解法在《九章算术》中已经给出，相当于：弦与高的和乘以半高，得到的积即为所求。

庄亨阳认为后法求得的结果为近似值，这种看法是正确的。

“并积”条为平面图形的并合问题。本条有6题。大都为已知几个正方形面积的总和，与这些正方形边长之间的关系，求各正方形的边长之类的问题。

“容面”条为一个平面图形内含另一个平面图形的问题。本条给出了圆的内接正方形边长的计算公式、圆的内接正三角形边长的计算公式、三角形的内接正方形的边长的计算公式、三角形的内接圆半径的计算公式。

第三节　《庄氏算学》内容概述（下）

《庄氏算学》卷四：曲线体

从《庄氏算学》的前三卷可以看出，《庄氏算学》的水平并不低。卷四的主要内容是体积计算问题和已知体积反求边长、周长之类的问题，相当于《九章算术》的方田章和少广章要解决的问题。《庄氏算学》解决这些问题的水平远远超过了《九章算术》。首先请看庄亨阳计算圆柱体的体积。

[例 1]设长圆体径与高皆七尺，问积几何?

法以长圆体径七尺求得圆面积三十八尺四十八寸四十五分零九厘九十六毫二十五丝有余，以高七尺乘之得二百六十九尺三百九十一寸五百六十九分七百二十七厘有余，即长圆体之积也。

此题相当于已知圆柱的底径 d=7 尺，高 h=7 尺，求圆柱的体积 V

庄亨阳给出的解法相当于：

先求圆柱的底面积 S，再运用公式 V=Sh 计算出体积

根据庄亨阳给出的数据 S=38.484509.9625 尺，可推之庄亨阳取 Л＝3.141595265 计算，可见庄亨阳取的 Л 值是非常精确的。

在卷七的“方圆诸率”条中庄亨阳为了简化计算，列了方圆关系的一个数表。此表的一分表中包含圆的直径（d）数种取值和相应的周长（c）的取值：

d=7, c=22；d=50, c=157；d=32, c=100；d=113, c=355；d=1000000, c=3141592。

此表把“智术”、祖冲之的约率 22/7 和密率 355/113 都包括进去了，这是为了方便计算，但在《庄氏算学》中，庄亨阳取的 Л 值通常为 22/7、355/113 或 3.14159265，他从未用“智术”和 Л=3.14 计算。

另外从上例还可以看出，庄亨阳对长度的乘方得到面积和体积的复名数的记法也是非常正确的，这比福建明代的算学著作《盘珠算法》和《数学通轨》大有进步。

在较高的理论水平指导下，庄亨阳对普通形体的体积计算是轻车熟路的，对如下形体，庄亨阳都正确地给出了体积（或表面积）的计算公式。

圆柱体积 V=Sh（S 为圆柱的底面积，h 为高）。

圆锥体积 V=Sh /3（S 为圆锥的底面积，h 为高）。

球体积 $V=\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{\pi D^3}{6}$（r 为球体的半径，D 为球体的直径）。

球表面积 $S=4\pi r^2=\pi D^2$（r 为球体的半径，D 为球体的直径）。

椭球体积 $V=\frac{\pi a^2 b}{6}$（此椭球系 a 为小径，b 为大径的椭圆绕大径旋转而成的旋转体）。

台体体积 $V=\frac{h}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$（$S_1$ 为上底面积，S_2 为下底面积，h 为高）。

实际上，许多公式在前二卷已经给出。除了上述普通形体之外，庄亨阳还给了一些复杂的形体体积的计算方法，以下为三例。

[例 1]球冠体积的求法

设截球体一段，高二寸，底径径九寸六分，问积几何？

此题相当于已知冠高 h＝20，底面直径 d＝96 求此球冠的体积

对此题，庄亨阳给出了相当于如下的解法：

球冠的底面半径 r＝d/2=48

球冠所在球的半径 R=$\frac{1}{2}(\frac{r^2}{h}+h)$=67.6

球冠的外表面面积 $S_1=\pi(r^2+h^2)$

以球冠的外表面和球心围成的球扇形的体积 $V_1=S_1$R/3

球冠的底面和球心圆成的圆锥的体积 $V_2=\frac{\pi d^2}{12}(R-h)$

最后求得球冠的体积 V=V_1-V_2

以上为庄亨阳求球冠的体积的过程。

用现代符号代数化简，庄亨阳相当于给出了球冠的体积公式：V=$\pi(\frac{d^2h}{8}+\frac{h^3}{6})$

这个公式完全正确。本题庄亨阳给出的结果是 V=76.571880，我们用计算器验算的结果是 V=76.5710849，这两种结果前五位数字完全相同，可见庄亨阳的计算是非常准确的。在本题中，庄亨阳还给出了球冠的外表面面积公式

S=$\pi(\frac{d^2}{4}+h^2)$作为他推导的基础，这个公式也是正确的，假如此公式不正确，庄亨阳不可能推出正确的球冠体积公式。

[例 2]正四面体的体积的求法

设四面体每边一尺二寸，求积几何？

此题相当于：已知正四面体（正三棱锥）ABCD 边长为 12，求 V。

庄亨阳相当于给出了如下两种解法：

解法一：取 BC 的中点 E，过 A 作正四面体的高 AH，在△BDE 中，∠BDE 为直角，BD＝12，BE＝BC/2＝6

∴DE＝$\sqrt{BD^2-DE^2}=6\sqrt{3}$

△ BDE 的面积 S＝BD・DE/2＝$36\sqrt{3}$

在△AHD 中，∠AHD 为直角，DH＝2DE/3=$4\sqrt{3}$　AD=12

∴AH=$\sqrt{AD^2-DH^2}=4\sqrt{6}$

最后求得 V＝S・AH/3=$144\sqrt{2}$

在庄亨阳的计算中，$6\sqrt{3}$、$36\sqrt{3}$、$4\sqrt{6}$ 等都是用其小数近似值表示的，他的每一步计算都有误差，最后他给了结果是 V＝203.646737。与我们用计算器验算的结果 V=203.646753 稍稍有一点误差，但前七位数字完全相同，

解法二，设正方体体积 $V_1=10^8$ 为比例的第一率，正四面体体积 $V_2=117851129$ 为第二率，正四面体边长的立方 a^3＝1728 为第三率，求得四率为正四面体的体积 V＝203.646750

在这种解法中，庄亨阳运用了边长相等的正方体与正四面体的体积之比为一定值这一性质，这一定值即为庄亨阳给出的比例第一率和第二率之比。用现代数学可算出这一比例为(1:$\sqrt{2}$/12)＝(1:0.1178513)，正好与庄亨阳给出的值相差 10 倍。但庄亨阳最终正四面体体积的计算结果又是正确的，可见，庄亨阳给出的解法是不严谨的。由于没有很好的小数表示法，像这样不严谨的地方在《庄氏算学》中是很多的，我们以后不再一一指出。

[例 3]设八面体，每边一尺二寸，求积几何？

庄亨阳给出了如下两种解法：

解法一：先将此八面体分在两个相同的四棱锥，再求得正四棱锥的高，然后求得正四棱锥的体积最后求得八面体的体积，庄亨阳给出的结果是 V＝814.586976（立方寸）

解法二：设正方体体积 $V_1=10^8$ 为比例第一率八面体体积 V_2＝471404521 为第二率，边的立方 a^3＝1728 第第三率，求得第四率为八面体的体积 V=814.587012。这种解法与现代解法得到的结果完全相同。

根据这两题的两种解法，我们可以作出如下的推测：第一种解法的每步计算都会产生误差，并且这样的误差会累积起来，即前一步产生的误差会累积到后一步中去，这样最终结果的误差是比较大的，庄亨阳对此可能不满意，为此他给出了第二种解法。

第二种解法运用了定理：边长与正方体边长相等的正多面体的体积与正方体的体积比为一定值。用代数法求出这一定值，这一定值即为这两题中第二种解法中的第二率与第一率的比值。

《庄氏算学》卷五“中西笔算”

本卷的主要内容为数学常识。分成“度量权衡”、“命位”、“加法”、“减法”、“因乘”、“开平方法”、“开带纵平方法”、“开立方法”、“四地顷亩分法”、“正比例”诸条。

“度量权衡”各分成“度法”、“量法”、“田法”、“斤法”、“里法”、“历法”、“日时”、“石法”诸子条。

“度法”子条给出了长度单位的名称及其之间的换算关系；“量法”子条给出了容积单位的名称及其之间的换算关系；“权衡”子条给出了十进制各数位的名称，包括大数各数位的名称和小数各数位的名称；“田法”子条给出了面积单位的名称及其之间的换算关系；“里法”指出了“里”、“步”、“丈”三种长度单位这间换算关系；“历法”给出了各种角度单位的名称及其之间的换算关系：1周天＝12宫，1宫＝30度，1度＝60分，1分＝60秒，1秒＝60微，1微＝60织，1织＝60忽，1忽＝60芒，1芒＝60尘；“日时”给出了时间单位的名称及其换算关系；“石法”传统上称为“斛法”，给出了体积单位与容积单位之间的换算关系。

“命位”条指出“凡数视所命单位为本，如度法命文为单位，则尺寸分厘皆为奇零，命尺为单位，则寸以下为奇零，而丈则进而为十……故尺列数单为一位，十为二位、百为三位，千为四位、万为五位。”庄亨阳认为数总是与一定的具体事物联系在一起的，“数”后面有一个具体的度量衡单位才有意义。

“加法”条指出：“加者，命众数而成总也。盖数始于一，终于九至十又复为一等，而上之十百千万以至亿北京该皆得各之。为一即皆自一而加者也。今自一位言之，有自一至九之数，合前后之位言之，有单十千万之等。称自单位数加起，成十则进前一位，仍为一单位，给本位下换次并之，即得总数。若夫宫度、时刻、斤两之数，则不以十进，必是所命之分始进一位”。可以看出，庄亨阳在此条首先给出加法的定义，然后指出了笔算十进制数加法技巧，最后还指出了笔算非十进制数加法的技巧。

在“减法”条中，庄亨阳首先给出了减法的定义，然后指出了减法笔算的技巧。

在“开平方”条中，庄亨阳指出了笔算开平方法的技巧。笔算开平方法与第一卷的筹算“开平方”原理是一致的。

“开带纵平方”分成“较法”和“和法”两个子条，在“较法”子条中，庄亨阳给出了一元二次方程 $x^2+ax=b$ $(a>0, b>0)$ 的正根的求根公式 $x=\frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$，本条与第一卷的筹算“开带纵平方”所要解决的问题相同，但解法有区别，第一卷是用数值法解上述方程的。

在“和法”子条中，庄亨阳给出了一元二次方程—$x^2+ax=b(a>0, b>0)$的小根求根公式$\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$。本条的几何意义是：已知长方形长宽之和为 a，面积为 b，求此长方形的长和宽。

在“开立方法”条中，庄亨阳指出笔算开立方的方法和技巧，笔算开立方的算理与第一卷筹算“开立方”的算理相同。

“田地顷亩分法”条与本卷“度理权衡”的子条“田法”的内容基本相同，只是阐述得更详细。庄亨阳指出“纵横五尺为一步，二百四十步为一亩，一百亩为一顷。凡地纵横相乘得积步，得积步以二百四十步除之得亩数，再二十四步为一分，除不尽者为零若干步。凡得积丈以六十除之得备数（每边数一丈得积四步）”，“再六丈为一分，除不尽者为零若干尺”。

在“正比例”条中，庄亨阳指出了比例的定义和解法，即已知比例的前三率，求第四率的方法。

《庄氏算学》卷六：比例十法

本卷的内容为平面图形的边积关系。全卷分十条，每条又有若干子条。

第一条为“一法正方”。分成“边求积”、“积求边”、“方求斜”、“斜求方”、“四倍积求边”诸子条。“边求积”子条要解决的问题为已知正方形的边长，求其面积，“积求边”子条为已知正方形的面积，求其边长。庄亨阳在此子条中指出求法为开平方法。“方求斜”子条要解决的问题为已知正方形的边长，求其对角线。“斜求方”子条为已知正方形的对角线，求其边长。在“四倍积”求边子条中，庄亨阳指出：“法以方边数加倍即得”。他认为一个正方形的面积是另外一

个正方形的面积的面积的4倍，那么这个正方形的边长是另外一个正方形的2倍。在本条的“方求斜”子条，庄亨阳给出例子为，已知正方形的边长为50尺，求得其对角线为70.7106尺。此比我国传统的“方五斜七”大有改进。

第二条为“二法长方”，分成“边求积”、“积求边”、“更面”诸子条，“边求积”子条要解决的问题为已知长方形的长和宽，求其面积。“积求边”子条要解决的问题为已知长方形的面积，长和宽的关系（长阔较或长阔和），求长方形的长和宽。庄亨阳指出其解法为开带纵平方法。“更面”子条要解法的问题为，已知两个相似长方形其中一个长方形的长和宽及这两个长方形面积之比，求另外一个长方形的长和宽，庄亨阳对此问题给出了正确的解法。

第三条为“三法斜方形”，分成“有边求积”、“有积数，有长、上下两阔较，求上下阔”、“有积有上下阔求长”三个子条。庄亨阳所指的“斜方形”现称为直角梯形。庄亨阳对直角梯形边积关系的各种情况进行分类讨论。

第四条为“四法三角形”，分成四个子条。第一子条为“有中长，有底阔，求积”要解决的问题是已知三角形的高h，底a，求其面积，在此子条中，庄亨阳给三角形的面积公式。第二子条为“有积数，有底阔，求中长”。第三子条为“有积数，有底阔，求中长”。第四子条为“勾股形”。庄亨阳对三角形边积关系的各种情况进行分类讨论。

第五条称为“五法锐角钝角三角形（多边形附）”，分成两个子条：“三角形求中垂线及面积”和“多边形”。在第一子条中，庄亨阳指出了三边已知的三角形的高和面积的求法。第二子条“多边形”下有一条分“有边有对角斜线求面积，庄亨阳给出了了多边形面积求法的一般原理，法依对角斜线分多边形的几形算之，其实质是把一个多边形分成几个三角形，再依次求出这些三角形的面积，最后求出这些三角形的面积的总和即为所求的多边形的面积。在此分条旁，庄亨阳有图示。

第六条为“六法两两等边无直角斜方形”，此条分为四个子条，第一子条为“有边求积”，庄亨阳给相邻两边和一条对角线已知的平行四边形面积的求法。

第二子条至第四条分别为“有勾有股求弦”、“有勾有弦求股”、“有股有弦求勾”，这三条为勾股定理的三种情形。

第七条为“七法方环形”，本条分成三个子条。第一子条为“有边求积”，给

出了方环形（回字形）的面积公式。第二子条为“有积及阔求内外边”，为方环形内外正方形周长的求法，第三条为“有内外方边求阔”，此子条要解决的问题为已知方形内外正方形的周长，求其边长差的一半（阔）。

第八条为“八法圆面”，本条的第一子条为“径求周”，给出了圆周长的计算公式；第二子条为“周求径”给出了已知圆的周长求径计算公式；第三子条为“径求面积”，给出了已知圆的直径，求面积的计算公式，第四子条为“周求面积”，第五子条为“圆面积求径”，第六子条为“圆面积求圆周”，后三条正确地给出了圆的边（径、周长）积关系的三个公式。

第九条为“九法椭圆”，分为“径求面积”和“积求径”二子条，给出了椭圆径积关系的两个公式。

第十条为“十法圆环形”，分成“圆环形有内外周及阔求面积”、“圆环形有内外径求面积”、“圆形有内外周求面积”、“圆环形有面积及阔求内外径”，“圆环形有面积及阔求内外周”、“圆环形有面积及内周求周并阔”、“圆环形面积及外周求内周并阔”诸条，庄亨阳正确地给出了圆环形的边（内外径、内外周、阔）积关系的若干公式。

《庄氏算学》卷七

本卷未题名。全卷分十四条。

第一条为“正方体”，本条下分“边求积”、“倍积求边”，“八倍积求边”诸子条，分别给出了正方体的边积关系的三个公式。。

第二条为“长方体”，本条下分“边求积”和“倍积求边”两子条。“边求积”子条给出了长方体体积的计算公式。“倍积求边”子条给出了定理：两个相似长方体的体积比为 2：1，则其对应边之比为 $\sqrt[3]{2}:1$。

第三条为“长圆体”。本条下分“圆周及高求积”和“积及高求周径”。分别给出了圆柱的边积关系的几个计算公式。这些公式在第二卷已经给出。

第四条为“带纵较数立方”。此条即开带纵立方。《庄氏算学》卷一卷五已经指出了开带纵立方的方法，但没有给出具体的例子。本条不仅再次指出了开纵立方的方法，而且还给出了 4 个具体的例子。每例都附有算草，算草中的笔算加法、减法、乘法与今天的笔算加法、减法、乘法完全相同。试看最后一例：

设如带两纵不同立方，积三千零二十四尺，其阔比高多二尺，其长比阔又多

四尺，问高阔长各几何。

设高为 x，本题相当于解方程 $x(x+2)(x+6)=3024$

庄亨阳给出了如下的解法：

设初商之高 $x_1=10$，则初商之阔 $x_1+2=12$，初商之长 $x_1+6=16$。

初商之积 $x_1(x_1+2)(x_1+6)=1920$

次商之积为原积与初商积之差：3024-1920=1104

次商三方廉 $x_1(x_1+2)+(x_1+2)(x_1+6)+x_1(x_1+6)=472$

$\because 1104/472>2$

$\therefore$ 可以设次商 $x_2=2$

$\because (x_1+x_2)=12 \quad (x_1+x_2)+2=14 \quad (x_1+x_2)+6=18$

$\therefore (x_1+x_2)(x_1+x_2+2)(x_1+x_2+6)=3024 \quad \therefore x=x_1+x_2=12$

此题庄亨阳附有算草。算草中的数码为中文数码，除此之外，算草中的笔算加法、减法、乘法与今天的完全一样。

第五条为“直线体”，本条占本卷一大半篇幅，本条未分子条。本条由若干问题组成。有些问题在前面已经讨论。如第 1 题、第 2 题即在本卷的第一条和第二条已经得到了解决，下面我们逐题讨论本条的各题。

第 3 题，给出了堑堵体的体积公式 $V=\frac{1}{2}abh$（a，b，h 分别堑堵体的长、宽、高 V 为堑堵体的体积）。

第 4 题给出了刍甍体的体积公式 $V=\frac{1}{2}abh$（a、b、h 分别为刍甍的长、宽、高）。

本题的刍甍为直三棱柱，是一般刍甍体的特例。

第 5 题在棱长和底边长已知的条件下，给出了底面为正方形的四棱锥的高的求法。

第 6 题给出了底面的正方形的四棱锥的体积公式 $V=\frac{1}{3}a^2h$（a 为底边边长，h 为高）。

第 7 题给出了阳马体的体积公式 $V=\frac{1}{3}a^2h$（a 为底边边长，h 为高）。

第8题给出了鳖臑体的体积公式 $V=\frac{1}{6}abh$（a、b为底边的长，宽，h为高）。

第9题给出了方台的体积公式，方台的体积公式前面已经给出。

第10题给出了上下底面为相似的长方形的台体的体积公式：

$$V=\frac{h}{6}(2a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+2a_2b_2)$$

（a_1、b_1分别为上底的长和宽，a_2、b_2分别为下底的长和宽，h为高）。

第十一题用出入相补原理给出了一般刍甍体体积的计算方法。

第十二题给出了平行六面体的体积的计算公式。

第十三题较复杂，题目为：

设空心正方体，积一千二百一十六寸，厚二寸，问内外方边各几何？

设内正方体的边长为x寸，此题相当于解方程 $(x+4)^3-x^3=1216$。

庄亨阳用两种几何方法得到了上述方程的同解方程 $x(x+4)=96$。

然后开带纵平方求得方程的正根 $x=8$。

第十四题题目为：

设大小两正方体，大正方体比小正方体每边多四寸，积多二千三百六十八寸，问大小两正方边多几何？

不难看出本题与上题同类。庄亨阳对本题给出的解法与上题的第二种也完全一样。

第十五题题目为：

设大小二正方体，共边二十四尺，共积四千六百零八尺。问两体之每边及体积各几何？

设小正方体边长x尺，大正方体边长y尺，依题意可得方程组：

$$\begin{cases} x+y=24 & (1) \\ x^3+y^3=4608 & (2) \end{cases}$$

庄亨阳给出的解法相当于 $(1)^3-(2)$ 可得 $(x+y)^3-(x^3+y^3)=24^3-4608$　(3)

用几何方法化简（3）得 $xy=128$　(4)

最后由（1）、（4）开带纵和数平方，取符合题意的解可得 $\begin{cases} x=8 \\ y=16 \end{cases}$

第16题至第21题为高深广远的测量问题。此类问题在第三卷中已经作了深

入的讨论，在此不再赘述。

第六条为“方圆诸率”，庄亨阳在此编写了一份数学用表，给出了方圆边积之间各种比例关系。

第七条为“椭圆求积”，本条给出椭圆的面积公式

第八条为“浑椭圆求积”，本条给出椭球体积公式

第九条为“弧矢求径及离径半径”，本条在弓形的长和高已知的条件下，给出了弓形所在圆的半径和离径（半径与弓形高的差）的求法。

第十条为“弧矢求积”。庄亨阳首先对旧法作了批评：“旧法以矢弦相关得弧背，径一围三之义疏甚，不可法”。《九章算术》给出的弓形面积公式为 $S=\frac{d^2+dh}{2}$（d 为弓长，h 为弓高），是不大精确的，但我国古代长期以此公式计算弓形的面积。庄亨阳对《九章算术》的旧法批评是中肯的，他给出的弓形面积公式为 $S=\frac{1}{2}[lr-d(r-h)]$（l 为弓形的弧长，h 为弓形的高，d 为弓形的长，r 为弓形所在圆的半径，S 为弓形的面积），此公式是正确的，但 l，r 都可以从 d，h 求出。庄亨阳在前卷对弓形的面积有讨论。

第十一条为“求中率法”，庄亨阳给出了比例中项的求法。

本卷最后四条分别题名为“截方锥体求积法”、“截圆锥体求积法”、“截直锐体求积”、“截椭圆锐体求积”。不难看出，这四种截体为四种不同形状的台体，台体的体积的公式在本卷的“直线体”条中已经给出，在此不再赘述。

《庄氏算学》卷八：七政经纬

除最后一条之外，本卷其余各条都论天文学。最后一条“三较连乘发明”完成了卷二给出的三角形的内切圆半径公式（见本章第三节）的证明。

第四节 《庄氏算学》数学思想简析

戴震在《四库全书》版的《庄氏算学》提要中说：“（《庄氏算学》）中间大旨皆遵御制《数理精蕴》，而参以《几何原本》、《梅氏全书》，分条采摘，各加剖晰，颇称明显。”戴氏的评价是非常中肯的。我们在对比《数理精蕴》和《庄氏算学》之后，发现除了最后一卷“七政经纬”之外，《庄氏算学》其余各卷的内容几乎

都可以在《数理精蕴》中找到出处。

《数理精蕴》[1]是清代康熙年间由朝廷主持编写的一部大型数学丛书。从书从1690年开始编写，到1721年完稿，最后于雍正元年（1723年）出版。《数理精蕴》是西方数学传入的一个阶段性总结。编写人员有梅瑴成、何国宗、杨文言等人。在当时"算经十书"和先进的宋元数学在事实上已经失传的情况下，《数理精蕴》主要取材于西方传教士的数学讲义，也有一些内容来自《梅氏历算全书》。

《数理精蕴》分上、下两篇和数学用表。上篇"立纲名体"五卷，主要讨论了数学的起源和基本数学理论。下篇"分条致用"四十卷，主要讨论数学的应用。上、下两篇四十五卷，加上数学用表八卷，全书共五十三卷，是一部数百万字的煌煌巨著。

《庄氏算学》受《数理精蕴》的影响主要表现于两个方面：一方面，《庄氏算学》在体例上与《数理精蕴》相近，其第一、二卷相当于《数理精蕴》的上篇，也为全书的理论基础；第三卷至第七卷相当于《数理精蕴》的下篇，也是一些数学原理的运用。另一方面，《庄氏算学》的内容也大都取自《数理精蕴》。其第二卷"几何原本举要"主要取材于《数理精蕴》上篇的后四卷。这四卷的前三卷为"几何原本"，共十二章；最后一卷为"算法原本"，共两章。《庄氏算学》第三卷"勾股测量"取材于《数理精蕴》下篇卷十八"测量"的"勾股测量"部分。《庄氏算学》的精华就是其第二卷和第三卷。《庄氏算学》其它重要内容如开平方和开带纵平方可以在《数理精蕴》下篇的卷十一中找到出处，开立方和开纵立方可以在下篇的卷二十三、卷二十四找到出处。可以说，《数理精蕴》是一个巨大的水库，成为了《庄氏算学》的活水源头。

《庄氏算学》全书不到十万字，而《数理精蕴》达数百万字。想在一本小书中容纳一本巨著的精华，这似乎是一件不可能完成的任务，而庄亨阳却部分地做到了这一点。这是庄亨阳数学思想最重要的特征。庄亨阳虽然在数学方面并没有什么创造，但他的《庄氏算学》却把《数理精蕴》某些精粹部分吸纳进去了。这可以表现为如下几点：

一、《数理精蕴》对几何图形和几何体的边积关系的论述比我国古代数学大有进步。《数理精蕴》正确地给出了椭圆的面积公式、球的表面积公式、椭球体

[1] 御制数理精蕴[M].文渊阁四库全书·天文算法类[Z].子部一〇五,第七九九册～第八〇一册.台湾商务印书馆.

的体积公式、球冠的表面积公式、球冠的体积公式。这些数学公式在以前的中算书中没有记载。《庄氏算学》也正确地给出了这些公式，并对几何图形和几何体的边积关系也有充分的讨论。

二、《数理精蕴》在研究曲线和曲面时发展了极限的数学思想并推广了祖暅原理。在研究球时，《数理精蕴》用极限的思想得到球的体积和球的表面积的关系：$V=\frac{1}{3}RS$；在推导椭圆的面积公式时，《数理精蕴》推广了祖暅原理。所有这些，在《庄氏算学》中都得到了足够的重视。在《数理精蕴》成书一百余年后，徐有壬在《截球解义》中也是运用类似的思想方法研究球的表面积和体积的关系的。但徐有壬的工作已经得到了应有的评价[①]，而《数理精蕴》和《庄氏算学》的工作在前，却长期被人忽视。

庄亨阳数学思想的另一个重要特征是把数学与实际工作紧密地结合起来。《庄氏算学》的主要内容是几何，而有关测量方面的问题又在《庄氏算学》中占有重要的地位。《庄氏算学》记载的测量方法有数种，比如有单表测望法，重表测望法，矩度测量法等；记载的测量的问题有十几道，都是一些长距离的测高、测远、测深方面的问题，此外，《庄氏算学》还记载了测距仪的制造方法和地图的绘制方法。所有这些，都是与他的治水工作紧密的联系在一起的。对此，戴震在《四库全书·提要》中也说："其官淮徐海道时，经理河防，于高深测量之法，随事推究，设问以穷其变，因笔之于书。"《庄氏算学》在算术方面的内容并不多，记载的算术问题大都是纳粮、赏银、分银、运粮等方面的实用问题。这些问题针对性强，是他宦海生涯中常常遇到的问题。这也表明，庄亨阳非常重视数学的实用性。

此外，庄亨阳也非常重视数学的精密性。这个方面最明显的表现为庄亨阳用非常精确的圆周率 π 值计算（见本章第三节）。在这里，我们顺便指出李俨先生、钱宝琮先生的一个小小的错误观点。李俨先生认为庄亨阳只取 $\pi=3.125$，在《中国数学源流考略》中，他说："圆率之说，袁士龙、顾长发、庄亨阳并从智术，即 $\pi=3.125$……"。[②]钱宝琮先生也有类似的观点[③]。另外，庄亨阳对弓形面积

[①] 沈康身.我国古代球面几何知识的演进[A].科技史文集（八）[C].上海科学技术出版社,1982.128-129.
[②] 李俨.中国数学源流考略[A].李俨其他科学史论文[C].李俨钱宝琮科学史全集,第 10 册[Z].辽宁教育出版社,1998.45.
[③] 钱宝琮.中国算书中之周率研究[A].钱宝琮论文集[C]. 李俨钱宝琮科学史全集,第 9 册[Z].辽宁教育出版

的论述等等也是非常可取的。这表明，明代数学粗疏的状况在清初就大有改观。

虽然《庄氏算学》在数学思想方面有许多优点，但是，其缺点也是非常明显的。一个最明显的缺点是全书的结构混乱，比如在最重要的第二卷“几何原本举要”中，几何知识和其它数学知识是混杂在一起的。我们在读到第二卷时感到特别难受的是地方是，几个其它类型数学问题突然插在几个联系得好好的几何问题中间，。《庄氏算学》第三卷也有同样得毛病。另外一个重要的弊病是重复罗嗦，许多内容在多卷中重复出现。虽然《庄氏算学》结构上有种种不足，但是细想一下，《庄氏算学》的前身是《河防算法》，而《河防算法》只是一份残稿，没有得到很好的整理就被出版。因此，存在这些缺点应该是可以理解的。

此外，《庄氏算学》的数学的抽象性程度不高。《庄氏算学》有二元三次方程组的例题，但庄亨阳给出的解法离不开几何直观。同时，《数理精蕴》采用了一些半符号性质的代数，这些没有被《庄氏算学》吸收。《庄氏算学》与名家集体编写的《数理精蕴》差距还是很明显的。

社,1998.15.

第七章 李光地和"安溪之学"

李光地是清康熙年间杰出的政治家和思想家。 在清初政治史和学术史上，李光地是一个具有深远影响的重要人物。在科学活动组织方面，李光地也扮演了重要的角色。清初，在康熙皇帝的倡导下，我国数学掀起了一股高潮。处于潮头的是著名数学家梅文鼎。但梅文鼎名闻天下离不开李光地的举荐。这次举荐已成为了中国科学史中的一段佳话。此外，李光地还大力培养天算人才，刊刻天算书籍。在某种意义上说，李光地是中国的"奥尔登伯格"[①]。李光地对数学也有一定的研究，以他为领袖的"安溪之学"在数学思想方面亦有一定的特色。

第一节 李光地生平

李光地[②]，字晋卿，号厚庵， 别号榕村，福建省安溪县湖头镇湖二村人，于明崇祯十四年（1642 年）生，自幼聪颖异人，4 岁时虽不识字，但能用炭条在地上摹写"忠义"二字，5 岁开始破蒙读书。7 岁会作赋。13 岁读儒家经典。14 岁举家被农民起义军所掳，后被其伯父救回。18 岁结婚，夫人林氏。19 岁有著作问世。24 岁编《历象要义》，25 岁通律吕之学 。

康熙九年（1670 年），李光地殿试中二甲二名进士，同年选翰林院庶吉士，1672 年授翰林院编修。

康熙十二年（1673 年），李光地请假回福建探望父母，因"三藩之乱"起无法回京，举家避入山中。当时占据福建的耿精忠在福州发动叛变，台湾的郑经也占据泉州，他们二人都曾派人招降李光地，但李光地均不从，而且就平叛用兵向康熙皇帝献计，把写好的奏疏藏在蜡丸之中，遣派仆人长途跋涉送至北京，托一位同乡官员转呈皇帝，深受康熙赞赏。康熙十六年（1677 年）清军收复福建后，主帅康亲王派人找到他，并奏请皇帝给予表彰，结果李光地被特旨升授侍读学士。在他赴京上任途中，其父李兆庆病故，只好仍留在福建守孝，没想到这又

---

① 奥尔登伯格(Henry Oldenburg,1615-1677)，英国皇家学会的首任秘书之一，著名的科学活动组织者。

② "李光地生平"根据下列史料编写：

1、（清）庄成.安溪县志[M].乾隆丁丑版,福建省安溪县志编纂委员会整理.厦门大学出版社,1988.221－222.

2、赵尔巽,柯劭忞.清史稿,第二百六十二卷,第三十三册[M].中华书局,1977.9899.

3、（清）李清植.李文贞公（光地）年谱[M].文海出版社,中华民国五十五年.

给他带来一个为朝廷立功的机会。康熙十七年（1678 年），同安人蔡寅为首的农民义军（史称"白巾贼"）万余人围安溪城，李光地募乡勇百馀人扼险固守，绝其粮道，义军最后不得不散去。不久，郑经派兵攻陷福建沿海数县，再次兵围泉州。家居安溪的李光地一面派家人入城勉励清军坚守，一面派家人率乡勇去请救兵，并为之领路架桥、出资犒军，很快解了泉州之围，康熙得知此事后升任李光地为内阁学士。

康熙十九年（1680 年），李光地服孝期满赴京上任。次年郑经死，李光地上奏康熙皇帝："郑锦已死，子克塽幼弱，部下争权，宜急取之。"力主乘机统一台湾，并保举施琅（当时任内大臣）担当主帅，被康熙采纳，授施琅以福建水师提督，加太子太保衔。此前姚启圣也曾举荐施琅，但康熙最后做出决定与李光地的力荐有直接关系。由于平定台湾有功，1686 年李光地升任翰林院掌院学士。但台湾收复后，他却又主张放弃台湾。此为后人所诟病。

1689 年，"观星台事件"爆发，康熙对李光地有所猜忌，李光地被调为通政使司通政使，实权有所下降，在这一年，李光地始识梅文鼎。李光地、梅文鼎、康熙之间的科学交往，在中国数学史中的地位非常重要，我们在下节要详细讨论。也是在这一年，李光地及时调整了学术方向，重新赢得了康熙皇帝的信任。

1694 年李光地提督顺天学政。1698 年授直隶巡抚，整治漳河、子牙河、永定河，平息水患，大兴水利，开创了古代治河的新篇章。康熙四十二年（1703 年）任礼部尚书；康熙四十三年（1704 年），皇帝以他"居官甚好、才品俱优"，升任为文渊阁大学士。直至其康熙五十七年（1718 年）７７岁去世，始终身居相位。卒谥文贞，赠太子太傅，被雍正帝褒为"一代之完人"。时人也尊称其为"安溪先生"，或"安溪李相国"。

在学术方面，李光地对《易经》深有研究，是一位易学大师。在思想方面，他投康熙之所好，改宗朱子学，成为一位理学大师。他奉旨编纂《朱子全书》、《性理情义》、《周易折中》等，成为清初复兴理学的中坚人物。他还十分注重科学技术的研究，在天文、地理、历法、数学、音韵、音乐、兵法、水利等诸多领域都卓有建树，《安溪县志》称其："至于图象之秘，声气之元，历法西算之微，无不精究洞彻。"李光地著述甚丰，共 43 种，后人编为《榕村全集》，存 38 种。

第二节 出色的科学活动组织者

一、举荐梅文鼎

李光地组织的科学活动，由于康熙和梅文鼎两个历史伟人的参与，而彰显出其伟大的历史意义。

康熙(1654—1722 年)，清朝第二代皇帝。姓爱新觉罗，名玄烨。康熙皇帝是我国历代最具科学修养的君主之一。他 9 岁（1662 年）继位，15 岁亲政。他在位期间，平三藩，收台湾，抵抗沙俄入侵，平定噶尔丹叛乱，使我国统一的多民族国家得到了进一步的巩固，立下了丰功伟绩。此外，康熙还非常重视文化建设。他曾经下令编《全唐诗》、《佩文韵府》等书籍，当时编的字典称《康熙字典》，至今仍受到人们的重视。他还开博学鸿词科，收揽人才。但是，他在重视封建文化的同时，也兴文字狱，杀了一些汉族地主阶级知识分子，以加强思想统治。康熙本人也具有丰富的学识。他不仅受过系统的儒家经典教育，还聘用传教士，向他们学习天文、历法、数学、地理学、医学、音乐和绘画等方面的知识。康熙热爱自然科学，在历代帝王中是少见的。

梅文鼎（1633-1721），清初著名天文学家与数学家。字定九，号勿庵。 安徽宣城人。梅文鼎的科学成就在清代影响很大。梁启超在《清代学术概论》中评论清代的科学思潮时，曾这样写道："我国科学最昌明者，惟天文算法，至清尤盛。兼通之，其开山之祖，则宣城梅文鼎也。"[①]阮元在《畴人传》的"梅文鼎传"后评论道："自征君以来，通数学者后先辈出，而师师相传，要皆本于梅氏。"并引用了钱大昕对梅文鼎的评价："国朝算学第一"[②]。李光地对梅文鼎的评价也甚高，并把梅文鼎与顾炎武、朱熹等人相比："历书有六十余本，不能刻，七十二家之历，无不穷其源流而论之，可谓集大成者矣。又乐善而虚，问则必尽其底里而告之，惟恐其不尽。人有于此一言之当者，喜出于中，采而录之，亦此学中之朱文公也。"[③] " 本朝如梅定九之历学，不特精中西之法，能表章出《周髀》，为西法不能外，及顾宁人韵书，真不刊之业，千古杰出，前贤未之有也"[④]。李光地认为，梅文鼎、朱熹、顾炎武都是各自领域的领袖人物。

[①] (清)梁启超.清代学术概论[M].上海古籍出版社，1988.23

[②] (清)阮元.畴人传・梅文鼎中，卷三十八[M].中华书局,1991.四八三

[③] (清)李光地.榕村语录 榕村续语录,下册[M].中华书局,1995. 七六五—七六六

[④] (清)李光地.榕村语录 榕村续语录,下册[M].中华书局,1995. 九〇三

梅文鼎一生刻苦钻研，勤奋著述，著有历算著作八十余种，著名的有《历学骈枝》、《方程论》、《弧三角举要》、《平三角举要》、《历学疑问》、《堑堵测量》、《弧《环中黍尺》等。

在梅文鼎、李光地和康熙三人中，他们的社会地位构成了一个金字塔，处于塔顶的康熙是一朝之君，处于塔底的梅文鼎是一介布衣。在他们三人中，梅文鼎最年长，比康熙年长约 20 岁，李光地的岁数几乎处于他们二人的正中间，但他们三人又几乎同时走向生命的终点。正是李光地，他协调康熙皇帝和梅文鼎，在君主和布衣之间架起桥梁，以迎合当时天文历算研究之需要[①]。

李光地举荐梅文鼎，与康熙好数分不开的。康熙学习历算的念头始于幼年的历法之争。

明末耶稣会士来华，传入了西方的科学与宗教。崇祯年间，在徐光启、李天经等人的组织下，编成了《崇祯历书》，但未及颁行，明朝就告灭亡（见本书第五章)。清兵进入北京之后，耶稣会士汤若望(Adam Schall von Bell, 1592-1666)向清廷进呈《崇祯历书》(改名为《西洋新法历书》)，从此，西方的历算著作为官方正式使用。17 世纪 60 年代，杨光先挑起的反教案，是清初政治史、文化史、科学史上的重要事件，直接影响了西方宗教和科学在中国传播的进程。康熙在幼年时代，因杨光先和汤若望之间的历法之争而深受震动，在“御制三角形推算法论”中，他提及了学习西方历算的原因：

康熙初年，因历法争讼，互为讦告，至于死者，不知其几。康熙七年，闰月颁历之后，钦天监再题，欲加十二月又闰，因而众论纷纷，人心不服，皆谓从古有历以来，未闻一岁中再闰，因而诸王九卿等再三考察，举朝无有知历者，朕目睹其事，心中痛恨，凡万几余暇，即专志于天文历法一十余载，所以略知其大概，不至于混乱也[②]。

在这样的背景之下，为自己能明断西方科学和传统科学的优劣，平息争论，康熙向耶稣会士学习西方知识。1668 年，康熙向耶稣会士询问西洋风俗，利类思(L. Buglio, 1606-1682)、安文思(G. de Magalhaes, 1610-1677)、南怀仁便编成《御览西方要记》，进呈康熙皇帝。南怀仁还向康熙介绍《穷理学》和其他

[①] 韩琦.君主和布衣之间:李光地在康熙时代的活动及其对科学的影响[J].清华学报(新竹),1996,26(4):421-445.

[②] 康熙.御制文集,第 3 集，卷 19[Z].康熙五十三年内府刊本.转引自：韩琦.君主和布衣之间:李光地在康熙时代的活动及其对科学的影响[J].清华学报(新竹),1996,26(4):421-445.

科学知识。但由于康熙当时年纪还轻，国内尚未平定，还无暇集中精力学习西方科学。

17世纪70年代，京师学术活动极为频繁。1678年，召征博学鸿儒，次年三月，在太和殿御试“璇玑玉衡赋”和“省耕诗”。康熙设立博学鸿词科，在全国范围内选拔了数十名学者，让汉人编修史书，以拉拢箝制汉族文人。“璇玑玉衡赋”竟然是试题之一，颇耐人寻味。璇玑、玉衡通常被看作中国古代的天文观测仪器，这使人联想到，康熙之目的可能是想借此考察汉人的科学修养，这与他的科学兴趣不无关系。此赋影响很大，当时入选的鸿儒，多把此赋收入自己的文集中。连没有参加考试的梅文鼎，也大约在1689年到北京之后，拟作长篇“璇玑玉衡赋”，充分体现了其渊博的天文学知识，此赋被争相传抄，一时洛阳纸贵。所以，在某种意义上，此赋对推动历算研究起到了一定的作用。但参加博学鸿词科的学者无人精通历算，可以想见，这次答卷很难令康熙满意。康熙崇尚朱子，又对历算(历算作为实学)颇为重视。清初理学名臣“精研性理，好治经学，而于历数亦多通晓。”究其原因，和康熙之提倡有重要关系[①]。

臣子为了博得君主的宠信，投其所好是最好的方法之一。李光地在为政之余，除研习朱子外，还对历算很感兴趣。在康熙十一年(1672年)，李光地同南怀仁讨论天体结构问题。此外，在李光地与梅文鼎相见之前，李光地向潘耒学算，但当时他对历算知识所知甚少。在回忆中，他曾如实地称：

某天资极钝，向曾学筹算于潘次耕，渠性急，某不懂，渠拂衣骂云：此一饭时可了者，奈何如此糊涂，……今日梅先生(指梅文鼎)和缓善诱，方得明白[②]。

在康熙二十六年（1687年）春，李光地疏乞终养，请假一年，临走前，康熙特意召见李光地，谈论历算，特别是关于西方天文学，这是康熙和李光地讨论西洋科学的首次记载：

(上)又问：“历法日月交蚀、五星留逆、凌犯，古人推得多错，其原安在？”奏曰：“历法不能不差，……即今历极精，然稍久亦当必差，所以要随时修正。”上曰：“古人七政各为度数，所以难于推算。今西洋人打几个团圈，大底三百六十，小底亦是三百六十，就能推算盈缩，这是他一点好处。”……上又问：“西洋

[①] 韩琦.君主和布衣之间:李光地在康熙时代的活动及其对科学的影响[J].清华学报(新竹),1996,26(4):421-445.

[②] (清)李光地.榕村语录 榕村续语录,下册[M].中华书局,1995.七七五

历法果好么？”奏曰：“其法先行甚精密，臣所取者其言理几处明白晓畅，自汉以来历家所未发者。看来西洋人学甚荒唐，而谭历却精实切当，此乃本朝历数在躬受命之符也。皇上戡平祸乱，功德巍巍，臣不敢赞。即制度文为有两事，足跨前古。”上问：“何事？”奏曰：“历法其一也。又满州十二字头尽合古韵，得天地之元声，亦从来所未及。”[①]

此后，康熙于康熙四十二年（1703 年）曾赐给李光地《几何原本》和《算法原本》二书。此时，李光地已经 62 岁了。对数表编好后，康熙赐给李光地一份，李光地不久就回复了一个札子，写着自己的读书心得：

……廷珍等又出御刊数表示臣，其用法以加减代乘除，以加倍折半代自乘开方。即数十乘方皆可以一除而得之，其用诚为简捷至扣。其造表之法则伊等咸诵。圣训所谓中比例者，盖以一与十相乘开方至二十余次得真数之二，以一与十之假数用相并折半法亦至二十余次，得与二相对之○三○一○三。两数即得，余可类求。此数表之根原，非圣明孰能启其秘奥地利。真隶首之别传，九章所未载也[②]。

不过，李光地并不是一帆风顺地获得了康熙宠信。他也曾被康熙猜忌过。这在 1689 年的“观星台事件”中得到表现。对“观星台事件”的前前后后，李光地在《榕村续语录》中向其门人作了详细的讲述。

事件的经过是这样的，康熙二十八年（1689 年），李光地随驾南巡，他们二月二十七日在南京。在观测天象之前，康熙单独会见了熊赐履。康熙向熊赐履问及李光地学问方面的情况，以下是他们二人的答问：

上问孝感（指熊赐履）：“李某学问何如？”曰：“一字不识，皆剿窃他人议论乱说，总是一味欺诈。”上曰：“闻得他晓得天文历法。”曰：“一些不知，皇上试问他天上的星，一个也不认得。”[③]

会见完毕后，已经是黄昏时分，康熙随即在一班大臣的护拥下到达观星台，李光地也得以随侍。康熙考问了李光地的天文学知识，以下是李光地记载的他们二人的问答情况：

既登，予与京江（指张玉书）相攀步上，气喘欲绝。上颜色赤红，怒气问予云：“你识得星？”予奏曰：“不晓得，不过书本上的历法剿袭几句，也不知到深处，

[①]（清）李清馥.榕村谱录合考,卷上[A].李尔启.榕村全书[Z].道光初刻本.43．转引自：韩琦.君主和布衣之间：李光地在康熙时代的活动及其对科学的影响[J].清华学报(新竹),1996,26(4):421-445.
[②]（清)李光地.榕村集,卷二十九[M]．景印文渊阁四库全书,1324：集部，二六三：别集类.台湾商务印书馆.
[③]（清)李光地.榕村语录 榕村续语录,下册[M].中华书局,1995.七四一一七四二.

至星象全不认得。”上指参星问云：“这是甚么星？”答以参星。上云：“汝说不认得，如何又认得参星？”奏云：“经星能有几个，人人都晓得，至于天上星极多，别底实在不认得。”上又曰：“那是老人星？”予说：“据书本上说，老人星见，天下太平。”上云：“甚么相干，都是胡说，老人星在南，北京自然看不见，到这里自然看得见，若再到你们闽广，连南极星也看见，老人星那一日不在天上，如何说见则太平。”[①]

在中国古代，老人星的出现，被视为“仁寿之征”，故李光地奏称“老人星见，天下太平”，想借此讨好康熙，而事实适得其反，遭到了康熙的责备。上述这段君臣对话表示康熙对李光地已抱有戒心，康熙想从他人口中探听李光地的为人，而熊赐履当时正因母丧在南京守制，故向熊氏打听。熊赐履可算是李光地的座师，而竟在康熙皇帝面前中伤李光地，说明师徒之间已交恶极深。李光地和熊赐履之间的恩怨，《榕村语录续集》亦有记载，称：“孝感气概亦笼罩人，似不可遽窥其底里，后频造求见，每往必有徐健庵(指徐乾学)，及见时又不说及学问，及问所疑，又不答所问。”[②]字里行间，流露出对熊赐履的不满。从中还可看出熊赐履和徐乾学关系非常密切。而徐乾学因向李光地递交陈梦雷的绝交书，很可能引起李光地的不快，俩人也可能为此积怨。

康熙君临观星台，与李光地等人的问对，显示了自己的博学多识，康熙又借此对汉人进行批评。观星台的君臣之对，康熙实际上早有准备，在此之前，他特地向传教士请教过老人星的情况。观星台的君臣之对，康熙不过是逢场作戏，并借此炫耀自己的博学[③]。显而易见，李光地等汉族大臣的答复难以使康熙满意，而李光地绘声绘色记录了这次问对，可见他所受到的心理打击，绝非寻常。同年五月，康熙回北京之后不久，就认为：“李光地等冒名道学，自谓通晓《易经》卦爻，而所作文字不堪殊甚，何以表率翰林？”康熙南巡回到北京之后，许多大臣都争向康熙献赋，以表祝贺，而李光地因没有进献，故康熙大为不满，于是将李光地调任通政使司通政使，对李光地来说，打击亦复不小[④]。

1676年，熊赐履曾因内阁票拟事致仕回籍，后寓居南京，在家闲居十余年，

[①] (清)李光地.榕村语录 榕村续语录,下册[M].中华书局,1995. 七四二.
[②] (清)李光地.榕村语录 榕村续语录,下册[M].中华书局,1995. 七三四.
[③] 韩琦.君主和布衣之间:李光地在康熙时代的活动及其对科学的影响[J].清华学报(新竹),1996,26(4):421-445.
[④] (清)李清植.李文贞公（光地）年谱[M].文海出版社,中华民国五十五年.

以藏书为乐事。1688 年，以礼部尚书再次受到重用，之后一些汉人官员在康熙面前说熊赐履的好话。次年九月，康熙谈话间论及熊赐履、李光地等人，对汉人奉承拍马的作风深恶痛绝，甚至发出“汉人行径殊为可耻！”的感叹。康熙认为李光地所讲的不过是王阳明的“道学”，而认为熊赐履宣扬的是朱熹的学问，对李光地进行了批评。《康熙起居注》记载了大学士王熙的奏对：“道学之人当涵养性情，若各立门户，各持意见，互相陷害结仇，何云道学？”康熙则说：“意见若能持久，亦自不妨，但久之彼自变易其说耳。”[①]康熙对汉官阳奉阴违的作法，已经不能容忍，同时也表现出康熙对汉族官员的防范心理。李光地在此之前，徘徊于朱学、王学之间，康熙二十八年五月，因受到康熙的批评而被撤消掌院学士，使得他在为学宗尚方面作出调整，一改先前的徘徊游移，转而笃信朱学。

另一值得注意的事实是，当熊赐履在南京时，曾与毕嘉密切来往。1692 年，康熙授意顾八代，发布了容许天主教在中国传播的“宽容诏”(edict of toleration)，熊赐履在其中也扮演了非常重要的角色。此诏对天主教在中国的传播有很大的保护作用，这也促使了一些文人(包括李光地)对西学的兴趣。

为了迎合康熙皇帝对西方科学的爱好，以达到与熊赐履等人争宠之目的，对李光地来说是一个非常现实的问题。可是，在当时，李光地的天算知识是非常贫乏的。正是在这一年，梅文鼎也到了京城。

梅文鼎专程到北京，是为了访比利时耶稣会士南怀仁。梅文鼎一向循循好学，每有精通历算之人，“虽在远道，不惮褰裳往从”，或通信请益。在到北京之前，梅文鼎曾在杭州作短暂停留，广交学人，并结识了耶稣会士殷铎泽(P. Intorcetta, 1625-1696)，因此，梅文鼎打算拜访南怀仁，有可能是通过殷铎泽的介绍，可是历史却阴差阳错，在梅文鼎到达北京之前，南怀仁刚刚去世。

梅文鼎在北京期间，正值《明史》纂修，学者名流云集京师，可谓极一时之盛，梅文鼎因此结识了不少学者。作为精通历算的大家，受朋友之托，梅文鼎参与了《明史》历志的部分修订工作。除吴任臣、黄百家等人参与其中的一些工作之外，梅文鼎在《明史》历志编纂中也贡献不小。大概是梅文鼎的工作颇得史局学者的赏识，李光地得以耳闻其名。

值得注意的是，从 1689 年底开始至 1691 年，法国耶稣会士白晋(J. Bouvet,

[①] 转引自：韩琦.君主和布衣之间:李光地在康熙时代的活动及其对科学的影响[J].清华学报(新竹),1996,26(4):421-445.

1656-1730)、张诚(J. F. Gerbillon, 1654-1707)及比利时耶稣会士安多(A. Thomas, 1644-1709)和葡萄牙耶稣会士徐日升(T. Pereira, 1645-1708)，开始向康熙介绍西方几何和代数知识。在掌握新的西方数学知识后，使康熙在和大臣们对话时增添了许多天文历算的问题。法国耶稣会士到北京之后，与清初形势已大不相同，三藩业已平定(1681 年)，海内升平，康熙学习西学达到了一个高潮。韩琦对当时的情况作了这样的总结：梅文鼎到达北京其时与李光地暂时失宠、《明史》纂修、康熙西学兴趣正浓正好交汇在一起。也正是在这一大背景之下，梅文鼎的到来，促使李光地把梅文鼎聘入家中，为后来康熙时代一系列历算活动成为现实，使清初西学传入呈现丰富多彩的局面[①]。

在梅文鼎被聘请到李光地家中后，李光地促使梅氏完成其历算著作，首先是促使写成《历学疑问》。梅文鼎曾记载道：

己巳(1689 年)入都，获侍诲于安溪先生。先生曰：历法至本朝大备矣，经生家犹苦望洋者，无快论以发其意也。宜略仿元赵友钦《革象新书》体例，作为简要之书，俾人人得其门户，则从事者多，此学庶将益显。鼎受命唯谨。……辛未(1691 年)夏，移榻于中街寓邸，始克为之。先生既门庭若水，绝诸酬应，退朝则亟问今日所成何论，有脱稿者，手为点定，如是数月[②]。

梅瑴成在为李光地《历象本要》所写的序中，也谈到了《历学疑问》的成书过程：

昔先徵君于康熙己巳岁至都门，主家侍御桐崖先生，公闻而先之，且设馆焉。先徵君家世受易，而好治历，兼通中西之学，欲著《古今历法通考》一书，拟列五十八卷，属稿未成。公曰：先生之书，卷帙浩繁，成之难，镂板亦不易，莫若逐条为之论说，以发明奥义，庶经生家亦得而卒业焉。先徵君然之，遂命题设问，成书数十篇，名为《历学疑问》。[③]

因此，《历学疑问》是在李光地的敦促下撰写的，1692 年，李光地还曾为《历学疑问》写序。后来梅文鼎又受到万斯同的勉励，才完成此书。

从 1689 年至 1693 年，梅文鼎在京师断断续续共停留了约四、五年的时间，

---

① 韩琦.君主和布衣之间:李光地在康熙时代的活动及其对科学的影响[J].清华学报(新竹),1996,26(4):421-445.

② 转引自：韩琦.君主和布衣之间:李光地在康熙时代的活动及其对科学的影响[J].清华学报(新竹),1996,26(4):421-445.

③ (清)李光地.历象本要·梅瑴成序[M].乾隆刊本.

见到不少算书，见识渐广，与耶稣会士安多也有往来。除馆李光地家外，还曾受到裕亲王福全(1653—1703 年，顺治第二子，康熙之兄)的礼请，但只呆了月余即告辞，而梅文鼎在宫廷已小有名声。1693 年，梅文鼎辞别李光地，返回南方。梅文鼎的天算成就当时已享誉京城，他完全可以继续长住，可为什么就告别朋友南下呢？1699 年，当梅文鼎和毛际可再次在杭州相见时，毛氏为梅文鼎作传，其中称："台官甚畏忌之，然先生素性恬退，不欲自炫其长以与人竞。"也许与梅文鼎不愿和人相争的性格有关，他辞别了李光地回到南方。之后，梅文鼎在江南和福建一带游学，长达十多年之久[①]。

梅文鼎游学于福建时间是康熙三十八年（1699 年)。在福建期间，他曾与林同人（1627－1714）和李光地的弟弟李鼎征等人相会。他向林同人借钞其写本《古历列星距度》，并在此基础上写有《古历星距度考》一卷；他感谢李鼎征刊刻他的著作《方程论》。康熙四十年（1701 年)，梅文鼎准备再度入闽，但因疾病未成行。对此，梅文鼎曾写信告诉了李鼎征："辛巳首春，戒装入闽，频行疾作，又不果行。"[②]

1703 年，梅文鼎再次与李光地相聚。相隔十年，为何再次相聚，韩琦对其中的经过和背景作了条分缕析[③]：

自从康熙初年历法之争发生之后，康熙对历算很重视，不时向周围大臣询问历算知识，或向大臣炫耀自己的学习心得。康熙对汉人不懂历算的批评，时时可见。康熙四十一年(1702 年)十月，康熙南巡，驻跸德州，康熙向李光地索取所刻书籍，李光地于是把梅文鼎的《历学疑问》进呈，康熙得到梅文鼎的书后说："朕留心历算多年，此事朕能决其是非"，两天后，康熙见到李光地，称："昨所呈书甚细心，且议论亦公平，此人用力深矣，朕带回宫中仔细看。"正是由于康熙对《历学疑问》的批阅，梅文鼎才在此年名闻天下。

第二年（1703 年）春，康熙南巡时，把《历学疑问》发回给李光地，并说："无疵暇，但算法未备，盖梅书原未完成。"在李光地看来，梅文鼎得到康熙的知遇，可谓千载一时。然而就在康熙四十一年（1702 年）十月，康熙在德州期

① 李俨.梅文鼎年谱[A].中算史论丛,第三集[C]李俨钱宝琮科学史全集,第七卷[Z].辽宁教育出版社,1998.515－545.或参见：韩琦.君主和布衣之间:李光地在康熙时代的活动及其对科学的影响[J].清华学报(新竹),1996,26(4):421-445.

② (清)梅文鼎.绩学堂文钞，卷一[M].四库全书存目丛书，集部，第 263 册.齐鲁书社，1997.

③ 韩琦.君主和布衣之间:李光地在康熙时代的活动及其对科学的影响[J].清华学报(新竹),1996,26(4):421-445.

间，曾对李光地说：汉人对算法一字不知。这些话无疑伤害了汉人的自尊性。康熙四十二年(1703 年)八月廿三日，康熙在灯下看梅文鼎的《历学疑问》，这使李光地回忆起 1692 年康熙对熊赐履历算知识贫乏的不满：

老师(指熊赐履)因言：壬申年(1692 年)上问孝感历算，律吕新书与郑世子书孰是，孝感原不知道，漫应以季通书是，上大不平[①]。

从 1692 年康熙批评熊赐履不懂历算，到 1702 年康熙批评汉人不懂算法，时隔十余年，对李光地来说，仍然是记忆犹新，这促使他猛然反省。1703 年春，康熙又把《几何原本》、《算法原本》送给李光地，在学习天算问题上，君臣之间一拍一合，甚为默契，但李光地"虽经指授大意，未能尽通，乃延梅子至署，于公暇讨论其说。"也就是说，李光地邀请梅文鼎的目的之一是为了更好地理解西方数学。

1702—1703 年间，李光地给梅文鼎写信，告诉他已把梅氏《历学疑问》进呈康熙的消息，与此同时，再次邀请梅文鼎到保定传授数学。大约在 1703 年，梅文鼎给李光地写了一封信，回忆了当年在北京一起和睦相处，李光地敦促梅文鼎成书的情景，感激之情，跃然纸上：

奉违忽复十年，每忆畴昔追随之乐。……承先生以历论灾梨，日拟补作，以竟其绪，而迄今未就，他可知已。每于养疴之隙，勉自策励，亦多稿本，然往往贪发胸中昔日难明之事，聊自遣适，山河阻修，末由就正。……私心感激，无以为喻，有捧函感泣而已。……且以鄙著进呈，草茆下士，姓名仰达宸聪，中心惭感，……[②]

从此信也可看出，梅文鼎已获悉李光地把《历学疑问》送给康熙皇帝。梅文鼎又得知在保定已经集中了一批对历算感兴趣的学生，故极为兴奋，在给朋友的信中，他这样写道：

某虽不敢以此相方，然亦亟思同志者共相讲明，每求其人而未得。今既有实心问学其人，又有贵同学数辈，丽泽相资，闻之不禁狂喜，即拟溯洄相从，亦出中诚，非泛泛酬应语也。属有保定之行，往返约有数月，……某所撰亦非一种，皆稿本，携之行笈，时时有所增定，以故不能录副。即《疑问》已经授梓，亦尚

[①] (清)李光地.榕村语录 榕村续语录,下册[M].中华书局,1995.八一五.

[②] (清)梅文鼎.绩学堂文钞，卷一[M].四库全书存目丛书，集部，第 263 册.齐鲁书社，1997.

有宜补之图，未备之篇也。……[①]

因此，李光地的再次相邀和学生们聚集保定，使梅文鼎决心再次投靠李光地，也正是在这一年，梅文鼎到了保定。在保定，梅文鼎得到了李光地的热烈欢迎。

李光地、梅文鼎、康熙三人的科学交往最初象一幕幕精彩的双人剧，最后，双人剧演化成了三人剧，从而到达高潮。

1704年，当康熙西巡时，康熙向李光地问及“隐沦之士”，李光地推荐了李颙、张沐及梅文鼎。次年（1705年）春二月，康熙南巡，李光地曾前往迎驾，“上问曰：‘汝前道宣城梅文鼎者，今焉在？’臣以尚留臣署对。上曰：‘朕归时，汝与偕来，朕将面见。’”闰四月十九日，康熙返回北京途中，李光地带领梅文鼎前往见康熙，一起受到接见的还有李光地的学生督学杨名时和天津道蒋陈锡。梅文鼎之所以能够受到康熙的接见，完全是李光地引见之功[②]。

一连三天，康熙在舟中接见梅文鼎。当时《三角法举要》已刻，梅文鼎把它进呈康熙。会见之后，康熙对李光地感叹地说：“历象算法朕最留心，此学今鲜知者，如文鼎真仅见也，其人亦雅士，惜乎老矣。”临别时，为表彰梅文鼎在天算方面的成就，特书“绩学参微”相赠[③]。对于历算能通皇上，李光地曾深为感叹地说道：“六艺真是要紧事，……本朝顾宁人之音学，梅定九之历算，居然可以待王者之设科。[④]”作为梅文鼎，对于李光地的引见，自然是感激涕零。

同样，梅文鼎对康熙的召见，也是受宠若惊，因此写了一首感恩诗，把康熙说成是古代圣贤的再现：

圣神天纵绍唐虞，观天几暇明星烂。论成三角典谟垂，今古中西皆一贯(御制三角形论言西学实源中法，大哉王言，著撰家皆所未及。枯朽余生何所知，聊从月令辨昏旦。幸邀顾问遵明训，疑义胸中兹释半。御札乘除迅若飞，定位开方辞莫赞。庶勤榆景　殊恩，望洋学海期登岸。却忆司成接对年，阿季多才精剖判。……[⑤]

[①] (清)梅文鼎.绩学堂文钞，卷一[M].四库全书存目丛书，集部，第263册.齐鲁书社，1997.

[②] 李俨.梅文鼎年谱[A].中算史论丛,第三集[C]李俨钱宝琮科学史全集,第七卷[Z].辽宁教育出版社,1998.515－545.或参见：韩琦.君主和布衣之间:李光地在康熙时代的活动及其对科学的影响[J].清华学报(新竹),1996,26(4):421-445.

[③] 李俨.梅文鼎年谱[A].中算史论丛,第三集[C]李俨钱宝琮科学史全集,第七卷[Z].辽宁教育出版社,1998.515－545.或参见：韩琦.君主和布衣之间:李光地在康熙时代的活动及其对科学的影响[J].清华学报(新竹),1996,26(4):421-445.

[④] (清)李光地.榕村语录 榕村续语录,下册[M].中华书局,1995. 七七六

[⑤] (清)梅文鼎.绩学堂诗钞，卷四[M].四库全书存目丛书，集部，第263册.齐鲁书社，1997.

康熙四十五年（1706年），梅文鼎的儿子梅以燕去世，李光地的儿子李钟伦也在同年去世。两位老人晚年丧子，其悲伤的心情可想而知。就在这一年六月，梅文鼎也离开了保定，携子遗骨南归，这一去竟成永诀。不过，两位老人的友谊终生不渝。当李光地七十（1711年）寿辰的时候，梅文鼎写诗祝贺，对当年举荐的感激之情，溢于言表：

诞毓中天盛，登庸大道公，赞襄仁寿溥，敷锡海邦同。燮理全经术，甄陶录爨桐，尘霾烦拂拭，顽钝藉磨砻。遂使寒岩朽，能邀圣主聪，一编亲指授，三接对优隆。霁色瞻云日，宸章焕彩虹。每怀抒短技，何以当苍穹。……[①]

次年（1712年），梅文鼎八十寿辰，李光地也写有一首诗祝贺：

寿梅定九先生八十，壬辰年

去圣三千远，六艺日以湮。专家多坠绪，绝学少传人。往往振奇者，纷论失道真。坐令残陋辈，嗤斥谬云云，我识梅先生，倏逾二十春。始见浩然博，继饮薰然醇。扣其生平书，累世莫问津。秉铖在邦畿，馆置城之闉。后生颇知问，我老又谁陈。独念千秋业，名山犹可分。谁能师老聃，存之俟子云。金薤一毫芒，利枣已缤纷，宝气惊星斗，天上动至尊。连日乘仙槎，辉光薄紫宸。授官臣已老，赐榜毅其门，别来又七载，音素常淳淳。蝇头满长幅，龙马想精神。尧夫室一堵，欲学范希文，衣冠鲜此志，无力故足珍。借问今何其，丹书出渭滨，道术混然默。古节高贱贫，有孙能传业，文质已彬彬。……春风九十度，祝哽及兹晨。姑苏佳丽地，杖屦每逡巡。颇订明年诺，相遇菊花新[②]。

李光地在诗中歌颂了梅文鼎的丰功伟绩，表达了对梅文鼎的思念之情，并对梅文鼎的孙子梅瑴成的顺利成长尤感欣慰。

李光地除了举荐梅文鼎之外，还举荐了数学家陈厚耀。

陈厚耀（1648—1722），字泗源，号曙峰，江苏泰州人。康熙丙戌进士。据《畴人传》记载："安溪李光地荐厚耀通历法，引见。上命试以算法，绘三角形，令求中线及问弧背尺寸。厚耀具札进，称旨。"[③]陈厚耀先官苏州府教授，后被康熙召入南书房，与梅瑴成等人一起编书于蒙养斋。阮元对陈厚耀的成就评价极

[①] (清)梅文鼎.绩学堂诗钞，卷四[M].四库全书存目丛书，集部，第263册.齐鲁书社，1997.

[②] (清)李光地.榕村集,卷三十六[M].景印文渊阁四库全书,1324：集部，二六三：别集类.台湾商务印书馆.

[③] (清)阮元.畴人传·陈厚耀，卷四十一[M].中华书局,1991.五〇九.

高：“吾乡通天文算法之学者，国初以来，以泗源先生为第一。”[①]他认为陈厚耀的成就超过了梅文鼎。

二、培养科学人才，出版天算书籍

梅文鼎被李光地邀请到保定后，培养了一大批天算人才，如魏廷珍、王兰生、王之锐、陈万策、徐用锡等人，他们都在巡抚公署。李光地之子李钟伦，梅文鼎之孙梅毂成，也来到保定，向梅文鼎学习历算。徐用锡当年在北京时，就曾向梅文鼎学习，他又追随李光地到了保定，再次受到梅文鼎的指教，在保定的一些学生，无不对梅文鼎表示敬意。他们同校梅文鼎的历算著作。对于这些人才的茁壮成长，李光地倍感欣慰，为此他赋诗一首感谢梅文鼎：

梅定九自南至，诸子从学中西算术，悟性强，力各有所造，以其暇日谈文赋诗。喜而有作（癸未年）

交我十载前，惠我十载后。幽诺未去践，晤期固非偶。徐魏乡然臻，陈氏集昆友。虽无广亭榭，西轩旧槐柳。虽无饮庶几，沧易致佳酒。系我烦委暇，聊来共尊缶。或邀步华池，秋风驿路口。年运递奔驰，六艺缺复久。诸子意未衰，斯文幸已厚。吾少也无能，今老亦奚有。忽见弟子师，古道生白首，凉色入新郊，素光升远薮。唱咏日未压，申篇夜还趣，王事惊我埤，先业赖兹守。况复喜晴获，披衣望星斗[②]。

在梅文鼎和李光地的调教下，魏廷珍、王兰生、王之锐、陈万策、徐用锡、梅毂成等人中多人成了康雍乾三朝著名的政治家和科学家。

魏廷珍，字君璧，一字董村，景州人。康熙癸巳一甲三名进士，授编修，官至工部尚书。

王兰生(?-1738)，字振声，号坦斋，交河人，清代音韵学家，在文学、书法、音韵、音乐、数学等方面造诣颇深。纂辑有《律吕正义》、《数理精蕴》、《音韵阐薇》等学术论著

徐用锡（1657－？），字坛长，宿迁人，占籍大兴。登乡举，康熙四十八年进士，官翰林院编修。从李光地游，通乐律、音韵、历数、书法。李光地的《榕村语录》是其记录成书的。

[①] (清)阮元.畴人传·陈厚耀，卷四十一[M].中华书局,1991.五一一.

[②] (清)李光地.榕村集,卷三十五[M]. 景印文渊阁四库全书,1324：集部，二六三：别集类.台湾商务印书馆.

在上述诸人中，梅瑴成的天算成就最高。梅瑴成（1681-1763），字玉汝，号循斋，又号柳下居士，安徽宣城人，梅文鼎之孙。梅瑴成发现“天元术”与西洋借根方法名异而实同，推动了失传已久的“天元术”复显于世。梅瑴成八十三岁去世，谥文穆，著有《增删算法统宗》十一卷、《赤水遗珍》一卷。他重编祖父的《勿庵历算丛书》，订定为《梅氏丛书辑要》六十四卷，雕版刊行。此外，他还是大型科学百科全书《历律渊源》编写人员之一。

福建有刊刻算书的传统，早在南宋，鲍澣之曾在汀州刊刻“算经十书”（见本文第一章）。到了清代，李光地、李鼎征等人继承了这一优良传统，李鼎征曾于康熙二十六年（1687 年）在安溪刊刻梅文鼎的《方程论》。梅文鼎为此寄诗四首答谢。李光地更是大规模刊刻梅文鼎的历算著作，自 1699 年后，他在保定刊刻的梅文鼎著作包括《历学骈枝》、《历学疑问》、《交食蒙求订补》、《交食蒙求附说》、《三角法举要》、《堑堵测量》、《弧三角举要》、《环中黍尺》等九种。[①]李光地还为《历学疑问》作序。

福建刊刻算学著作的传统一直延续了下来。到了光绪十七八年间，由闽浙总督卞宝第、谭钟麟先后督修，福建刻《四库全书》一百二十三种，其中有关算学之书为：周髀算经二卷，音义一卷；九章算术九卷，音义一卷；孙子算经三卷；海岛算经一卷；五曹算经五卷；夏侯阳算经三卷；五经算术二卷。这是南方各地刊刻数量最多的一省。

第三节　李光地与清初“安溪之学”的数学思想简析

一、“安溪之学”的兴起

在李光地的倡导之下，经过梅文鼎的调教，一个以安溪人为主体的科学群体成长起来了。清代初期八闽数学的主要工作集中在这个被后人称之为“安溪之学”的群体中。

“安溪之学”的领袖为李光地，其代表人物有李光地家族诸人，陈万策家族诸人。在精通数学的诸人中，李光地家族有李光地、李光弟的弟弟李鼎征、李光坡，儿子李钟伦、李钟佐等人；陈万策的家族中有陈万策、陈万策的儿子陈冕世，

[①] 李俨.梅文鼎年谱[A].中算史论丛,第三集[C]李俨钱宝琮科学史全集,第七卷[Z].辽宁教育出版社,1998.515－545.

堂侄陈亮世等人。

李鼎征，字安卿，李光地的次弟，康熙十九年中，任嘉鱼县县令。曾刊刻梅文鼎的《方程论》于泉州。梅文鼎的《几何补编》成书后，李鼎征曾亲手誊写。后任户部主事。李鼎征为人耿直。任户部主事不久，因与上司不和，他去职回家养老。对历算的学习，李鼎征曾说过：“历算之学，至今寻思能记忆者，皆是自己苦思得者。”[①]这是非常有见地的，与孔子的“学而不思则罔”有异曲同工之妙。

李光坡，字耜卿，别号茂夫，中年放弃科举，专以课徒为业。在天算方面，李光坡曾作“圣人作历之原”，此文收录在《榕村集》中，《畴人传》也有全文收录。

李钟伦，字世得，别号菜园，李光地冢子。钟伦敏而好学，事事必求其根本。李钟伦四十四年病卒，梅文鼎称其胸中无膏肓之疾。

李钟佐，字世谐，《安溪县志》称：“凡西士所传其国贤所为历学及几何数法，指陈根裔，象译浩汗，万支千凑，不可胚胎，钟佐冥观，无不晓了”。梅文鼎曾想如果有机会去京城，就要与钟佐讨论历算。可惜，李钟佐早卒，没有让梅文鼎实现这个愿望。

李钟侔，字世忘，号阆麓，李鼎征子，著有《经义畸说》、《天人剩谈》，曾与杨文定、李穆堂、方望溪等前辈讨论学术。

陈万策，字对初，号谦季，生而颖悟，九岁能文，曾游学于京城，受学于梅文鼎（见本章上节），深受李光的器重。陈万策康熙戊戌进士，官詹事府詹事，陈万策曾与李光地讨论学术。《安溪县志》称：“相互究经学，旁及律法、四声、六书、九算，莫不该贯”。在李光地主持下，陈万策参编《周易折中》、《性理精义》和《诗经传说》。在数学方面，作有“中西算法异同论”一文，此文《畴人传》有全文收录。

陈亮世，字南志，别号林村。庚子年中举，丁未年任闽县学教谕。庚戊年进士。《安溪县志》称：“亮世夙娴数学，于算法诸书，考究精详。凡有巨程大役，料估销算，不差铢黍。”陈亮世敏学好问，遇有疑难，必请指授而行。陈亮世对《精理精蕴》深有研究。

[①] (清)李光地.榕村语录 榕村续语录,下册[M].中华书局,1995.八一五.

二、"安溪之学"数学研究方面的特色

清初"安溪之学"的数学家们的主要工作是在吸取中西数学内容、数学思想的基础上，进行新的研究。其数学研究有两个突出特色：天算相结合和律算相结合。

1.天算相结合

天算结合研究是我国传统数学的一个显著特点，李约瑟先生曾说过："很明显的是，在整个中国历史中，数学的重要性主要是在于与历法有关"[①]。"安溪之学"继承了这个传统，并且有所发挥，在这许多人中，都有所表现，其中李光地最为突出。李光地在 "记太初历"中，把太初章、会、统、元之法，阐述得十分清晰而有条理；他还进一步指出能得到与三统一元之年数相近的结论但推步不同的另一种方法，即"四分术"法，并指明推步之不同的原因是"日法异故也"；另外，他还写有"记浑仪"，概括了当时"不可考"的古璇玑玉衡之法的大要。李光地的研究特点主要是体现在"贯通古今，洞明根底"上。这种工作，在接受西学知识、整理我国传统数学的时代里，是具有较大意义的。

我们知道，在"定气之法"、"定朔之法"、"定历元之法"上，郭守敬都曾作出贡献，李光地则在郭守敬的基础上，又向前推进了一步。如定气之法，人们一般认为，"立历象法之大端，定气也"。然而定气之法，古谓天周岁终而已，不知所谓岁差。直至虞喜才知道岁差。然而立为岁差之率，其年数或以七十五年，或以五十年，或以一百年，没有定论，唯郭守敬谓六十七年者近之。但郭守敬有岁分消长之法，却非岁分之真有消长。李光地指出："辛已之前，最高（"天有赤极，有黄极，有最高，有最高之行"）向于夏至而未至，故郭太史以为日消，自时厥后至于今乃渐长，盖最高又过夏至七度矣。然则太史之术其疏乎，不在消长之根，在最高之行故也" 。"日行有高卑，有迟速，冬至之日，适直速度，则是日之晷刻减，而见为岁分消耳。新历推得最高之度，不在一处，自至元辛巳以后，最高渐过夏至而东，故其岁又已自消而长"。这是李光地比郭守敬高明的地方。又如关于定历元法，历代沿用自汉前后志始之法，然而历代之历，皆数十年而遂差，那么在万年之前，或千载之后，能否入其轨辙呢？面对这个问题，郭守敬索性"破而不用"。李光地认为，"此岂非直捷简易，不事支离之哉！"里差之说，具出于《周髀》，然而其学不传已很久了。郭守敬分方测候二十七处，李光地认为，这

[①] （英）李约瑟.中国科学技术史,第三卷[M].科学出版社,1978.339

样做“其于里差详焉”，然则“终局于地平之说，故其法不能通于四远”。李光地指出：“新历以地为圆体，南北东西，随处转移，故南北则望极有高下，东西则见日有早暮。望极有高下，而节气之寒暑因之矣，见日有早暮，而节气之先后因之矣。推之四海之外，四方上下，可以按度而得其算，揆象而周其变，其说与《周髀》合”。这又是李光地高出郭守敬的地方。阐述了这些，他发出感叹：“今有三角八线诸法，固已极测算之精微，又得其人而观候修正之。钦天授时之功，有不超越前代者哉？！[①]”因此阮元作《畴人传》论曰：“文贞一代伟人，立功名于当世，……所著本要及论太初、四分诸篇，非大覃思究极精奥，孰能与于斯乎。夫乃知大儒之学，无所不通，盖天地灵秀之所钟，非常人所能企及也”[②]。

李光坡也认为，治历之具，历、象二者皆不可偏废。他在《榕村集》卷二十的“圣人作历之原”中说：“历，记数之书也；象，观天之器也。有历而无象焉不可也。所谓象者大略有四：一曰仪，璇玑是也……，二曰管，玉衡是也……；三曰有，土圭是也……；四曰漏，分日为百分，而节水为漏，以数其刻。盖凡仪管表晷之施于用者，皆以是为测候之准焉。四者互相参质以求天验之详，夫然后可以记之于历，而颁于天下”。并且认为这是推步的依据，“所以必本于实测，而不可以私求臆见断焉者也”[③]。

李钟伦虽早卒，但他在天算方面有天才。杭世骏在《梅文鼎传》中称：“甲数乙数用法甚奇，本以赤道求黄道，钟伦准其法，以黄求赤，作为图论。有制器以象之。”[④]

另外，从前面“安溪之学”诸人的小传中，我们也可以看出李钟佐、李钟侓二人也历算兼通。

2. 律算相结合

“乐”作为六艺之一，向来为儒生所重视。早在宋代，福建人阮逸、蔡元定把数学和乐律的研究结合起来，为律学的发展作出了重大的贡献（见本文前面有关章节）。“安溪之学”的儒生们也把“乐”作为培养理想人格的重要手段。在他们之中，多人对律学有所建树。在这里，也以李光地的成就最为突出。在“乐律”一文中，他首先对律学中的“声”、“律”、“正声”、“变声”、“正律”、“变律”等

[①] (清)李光地.榕村集,卷二十 [M].景印文渊阁四库全书,1324：集部，二六三：别集类.台湾商务印书馆.
[②] (清)阮元. 畴人传·李光地，卷四十 [M].北京:中华书局,1991.五〇〇.
[③] (清)李光地.榕村集,卷二十 [M].景印文渊阁四库全书,1324：集部，二六三：别集类.台湾商务印书馆.
[④] (清)杭世骏.道古堂文集,卷三十一[M].续修四库全书.1426：集部·别集类.上海古籍出版社.

概念结合“三分损益法”作了条分缕析：

乐有声有律。而声又有正声有变声，律有正律，变律，有正半律，有变半律数者，备而乐之用周矣。正声者，自宫声之数八十一，三分损益以生徵商羽角者是也，变声者，五声相次隔一律，则音和；隔二律，则其音远。角徵羽宫之间相隔二律，故又自角转生二律以补其欠，所谓变宫变徵者是也。正律者，自黄钟之管长九寸积数十七万七千一百四十七损益相生而穷于仲吕者是也。变律者，仲吕反生黄钟，不及九寸之数谓之变黄钟焉，自此而又损益以生十一律者是也。正半律则取正律而用其半也，变半律则又取变律而用其半也。

其次，他对黄钟律的重要性作了阐释，并对历史上记载的各种不同的黄钟管长度作了说明：

声律之本皆起于黄钟，则黄钟一律要矣，黄钟之管长九寸者，定论也。史记言八寸一分者，变一寸十分而为九分以便于相生也。吕令言三寸九分者，谓别制一管以为律本，名曰黄钟之宫，自黄钟八寸一寸至应钟四寸二分长短之间相距三寸九分。于是即其间穴而吹之以备黄钟七声，以为十二律取声之准而已，其实三说无以异也。

最后，他对黄钟的围径作了考察：

黄钟围径，古无明文，然即周鬴汉斛之制推之，则其面幂当容九分，其积实当得八百一十一分，由是以幂积而求圆径，则黄钟之实数刻得矣。蔡邕孟康言径三分围九分，非也。胡瑗、蔡元定以幂积求之，径不止于三分，围不止于九分是也。然胡蔡之算亦以径一围三之法定之。殊不知径一围三者，古人之疏率，以量田地则可矣。一管之微，其声气之妙转于毫厘秒忽之间而可以矣，若是其约略疏阔乎？故必以祖冲之密率算之，然后黄钟之径围积实可定也。若夫古人之尺寸今已无考，故或之累黍或参之古斛量权衡之属。此虽博雅之一助而实非制作之原本也。[1]

李光地认为，对黄钟的围径计算，应该采用祖冲之的密率，其原因是律管是精密的器物。他对历史上采用“径一围三”之法计算律管的围径一一作了批评。这些批评从数学的角度看是精辟的。

此外，李光地还对历史上流行的“候气说”作了批评。他曾对门人说过：“候气之说决不可信”。“律吕中，候气之法最不是。《朱子语类》所记论乐数十条，

[1] (清)李光地.榕村集,卷二十一[M].景印文渊阁四库全书,1324：集部，二六三：别集类.台湾商务印书馆.

无及候气者，可见朱子不信此说。《新书》因蔡氏所论著，《礼书》亦仍之而未革耳”[①]。实际上朱熹也信奉“候气说”。在这里，李光地是在为圣人讳。

“候气说”在宋代和宋代之前非常流行（见本文前面有关章节），但在明代，经王廷相（1474－1544）、何瑭（1474－1543）、朱载堉、邢云路等人的批判，逐渐衰落并走向消亡。

另外，李光坡对李文利的黄钟长三寸九分之说也作了批判，他说：“李文利言黄钟三寸九分大谬”[②]。

三、“安溪之学”的数学思想简析

清初“安溪之学”的数学家们生活在西算传入之时，同时又受朱熹理学的熏陶。他们的数学思想受到传统数学、西方数学和流行哲学思想三个方面的影响，亦表现出如下三个方面的特色：

1、注重应用方面的研究

我国的传统数学研究有个很大的特点，是重视实践和经验。虽然在十四世纪后祖国数学出现停滞现象，并且接着主要是接受和吸收西方数学，但我国数学发展的这个传统却并不因西学的输入而丢掉。“安溪之学”的数学家们的研究是比较注意应用的。李鼎征为嘉鱼令时，曾领导人民筑堤，这个工作需要大量应用数学。又如前面的小传中所述，陈亮世把数学应用于工程结算中。李光地也认为：“若历算，适于日用，所需尤大。”[③]

2、重视中西算法的比较

西洋数学输入之后，我国许多有志之士力图在这个基础上对祖国传统数学作一番新的研究，这显然就少不了要做中西比较，陈万策在这方面很有研究。他着重于比较中西算法，特别可贵的是他能在比较之中吸取西法的长处，为我国所用。他指出：“夫中法言异乘同除，而西法总之四率，可谓异矣。而为比例之理则同也。九章之内，大要多同借衰迭借之法，盖差分盈朒之变其名尔，至中法谓之勾股也用边，而西法谓之三角也用角，三边三角，可以互求。中法有不逮于西法者，则八线立成表是也。剖全圆而为半周，又剖为象限立切割弦矢之线，以成正方角，

---

① (清)李光地.榕村语录 榕村续语录,下册[M].北京:中华书局,1995.八三七.

② (清)李光地.榕村语录 榕村续语录,下册[M].北京:中华书局,1995.八三七.

③ (清)李光地.榕村语录 榕村续语录,下册[M].北京:中华书局,1995.七七五.

何尝非勾股与弦哉”。既然如此，为什么能说西法妙于中法呢？这是因为“用边之术，可以高深广远而已，用角之术，则本于天度，所以在璿玑而齐七政，亦无不具乎此。盖用边者斜剖之方，而用角者剖心之圆，方者测地，而圆者并可以窥天也”。他说的是有一定道理的。又如比例数之表[①]，西法“不用乘除而用并减，于平方立方三乘方以上之算尤捷焉，皆中法之所未有也”。至于算具，他说，西法有筹算，有笔算，有短算，有比例规算，比中法来得丰富。他从中西法的比较中还看出，“虽然异者法也，而同者理也。若刘徽、祖冲之、赵友钦，以四角起对，所算圆周之率，与西法曾无毫厘之差，而西人以六宗率作剖圆八线者，其术不外乎此。可见理同而法不不异”。从而得出正确的结论：“兼中西之法神而明之，则艺也进乎道矣”[②]。

考究中西算法之比较，李光地的研究也是颇有见地的。他对中西算法作深入研究后，在“算法”一文中指出：“古所谓勾股者，举中之法耳，今三角法，即勾股也，然而有直角，有锐角，有钝角，又其算也，分周天三百六十度，而角度对之，故量角之度，以为起数之根，然则勾股有直锐钝，其数起于边，而不起于角，岂非有待于新法以补其所未备者乎？其用之则以八线之表。八线者，亦古人所谓勾股弦也，今则变勾而曰矢，且有正矢焉，有余矢焉。变股而曰弦，且有正弦焉，有余弦焉。其在圆外之股则曰切，且有正切焉，有余切焉。变弦而曰割，且有正割焉，有余割焉。八线相求，互为正余，故举一则可以反三，穷三则可以知一，举一反三，穷三知一者，则今之三 率法是也。三率之法，即古者异乘同除之法，而其法加妙，用之加广，则非古人所及也”。于是，他总结出：“欲通新法者，必于几何求其原，以三角定其度，较之以八线算之以三率，则大而测量天地，小而度物计数，无所求而不得矣”[③]。

应该说，陈万策和李光地对当时的中西两种算法的比较是客观的。不过，受梅文鼎影响，李光地认为中算的时法不如古法，而西法又取自中算古法。如他多次在赞扬梅文鼎时顺便指出：“梅定老客予家，见其无一刻暇，虽无事时，掩户一室中如伏气。无非思历算之事，算学，中国竟绝，自定老作九种书，而古法竟

[①] 即对数表。

[②] (清)阮元. 畴人传・陈完策,卷四十[M].北京:中华书局,1991.五〇七一五〇八.

[③] (清)李光地.榕村集,卷二十[M].景印文渊阁四库全书,1324：集部，二六三：别集类.台湾商务印书馆.

可复还三代之旧，此间代奇人也。”[①]“梅定九讲算法，存古九章，渠言西学，总不出吾中国学内，只是中国失传。定老必有搜辑汉、唐、宋以来古法，以迄于今，最妙此事。”[②]“本朝如梅定九之历学，不特精中西之法，能表章出周髀，为西法不能外。”[③]到了晚年，李光地完全陷入到“西学中源论”的窠臼中去了。在快去世时，由于对李鼎征好西学深感忧虑，李光地写给李鼎征一封信。在信中他说：“弟好读西方，无用。”[④]

“西学中源论”由清初明末遗民黄宗羲发起，经康熙倡导，在梅文鼎的鼓吹下，在清代早中期非常流行，推动了“算经十书”和宋元时期的古算在清代中叶复显于世。但“西学中源论”在学理上显然是错误的，其流弊深远，使国人易产生一种盲目的虚荣心和排外心理，从而妨碍西方先进科学技术的输入。

3. 理学影响下的数学观

在明清时代，朱熹的理学在意识形态中占统治地位。如前所述，李光地也不得不改宗理学。事实上，“安溪之学”的数学家们也多宗理学。他们不少人都著有理学方面的著作。他们的数学思想有深深的理学的烙印。在这个方面，他们与明代八闽数学家柯尚迁并没有多大区别。在“安溪之学”的诸人中，李光地的理学数学观最为突出，在理论水平上远远超过了柯尚迁。

李光地在《周易折中》卷十七中的“说卦传”的“参天两地而倚数”的按语中指出：“以理言之，则张氏所谓以一包两者是，盖天能兼地，故一并二成三也。……故参天两地者，数之原也。”[⑤]这里李光地用天地阴阳解释数本原。随后，他以此理解释一些简单自然数的加法和乘法运算的结果：“盖以理言之，则参两之数，皆统之以三，故三三为九，三二为六，一三二二为七，一二二三为八也。”[⑥]另外，在《周易折中》卷二十一中也说：“自《洛书》以三三积数，为数之原，而自四以下，皆以为法焉。”[⑦]在这里他又把《洛书》作为数的本原。西方的三角学传入我国后，他立即用象数理论加以解释：“算法重三角形。盖员，天也；方，

① (清)李光地.榕村语录　榕村续语录,下册[M].北京:中华书局,1995.七六五一七六六.
② (清)李光地.榕村语录　榕村续语录,下册[M].北京:中华书局,1995.七七五一七七六.
③ (清)李光地.榕村语录　榕村续语录,下册[M].北京:中华书局,1995.九〇三.
④ (清)李光地.榕村集,卷三十二[M].景印文渊阁四库全书,1324：集部，二六三：别集类.台湾商务印书馆.
⑤ (清)李光地.周易折中[M].北京:九州出版社,2002.928-929.
⑥ (清)李光地.周易折中[M].北京:九州出版社,2002.928-929.
⑦ (清)李光地.周易折中[M].北京:九州出版社,2002.1095.

地也；三角，人也。三角起于员，人生于天也，成于方，成于地也”。[1]

可见，李光地并不是从数本身来研究数学，而是要极力寻找数背后的“天地阴阳”之“理”。

[1] (清)李光地.榕村语录 榕村续语录,下册[M].北京:中华书局,1995.八一四

第八章　福建的近代数学教育

福建近代数学教育，肇始于洋务运动。清同治五年（1866 年）洋务派创办福州船政学堂，标志着福建近代数学教育的诞生。光绪七年（1881 年），福州鹤龄英华书院设置了数学课程。1898 年，“戊戌变法”，使中国教育发生了一场深刻的革命，近代教育制度得以确立，福建的数学教育也随之进入了一个新的发展阶段。

第一节　福州船政学堂的数学教育

一、福州船政学堂的创办

福州船政学堂原名“求是堂艺局”，是我国近代最早的一所海军制造学校。这所学校创办时间比京师同文馆、上海广方言馆和广州同文馆稍晚，不是洋务派最早创办的以吸收西方科学技术知识为目的的近代学校，但其存在的时间之长，影响之大，远远超过了比它早创办的那几所学校。

福州船政学堂创办于同治五年（1866 年 12 月）。它的设立，是与同时创办的福州船政局紧密联系在一起的。1840 年，鸦片战争爆发，英国人用利炮坚船敲开了中国的大门。不久，在第二次鸦片战争中，中国又被迫割地赔款。帝国主义列强的不断侵略使清朝的官僚阶层深深感到西方的科学技术是很发达的。为了防御外敌从海上来的侵略，清朝政府的许多官员都看到了“防海之害”的迫切性。福州船政局的创办人、洋务派的代表人物左宗棠（1812－1885）指出：

“自海上用兵以来，泰西各国，火轮兵船直达天津，藩篱竟成虚设，星驰飙举，无足当之……欲防海之害而收其利，非整理水师不可；欲整理水师，非设局监造轮船不可。”[①]

福州船政局在最初筹建之时，似乎并未考虑到要附设技术教育机关。在 1864 年的最初筹建计划里，没有一句话涉及到关于学校和教育体制的事。1865 年初，德克碑(Paul Alexandre Neveue d’ aiguebelle, 1831-1875)受时任闽浙总督左

[①]中国史学会.洋务运动（三）[Z].上海:上海人民出版社，1961.5-6.

宗棠的委托，返回法国进行调研。创设学堂是在德克碑提供的技术和财政情报的基础上，最后修改船政局的建设方案时才提出来的[1]。

同治五年阴历十一月初五日（1866 年 12 月 11 日），左宗棠已经调任陕甘总督，这时他正在新旧职位之间进行权力交接。他就福州船政局的建设向同治帝连上两本奏折，其一为“奏呈船政事宜折”，其二为“详议创设船政章程，购器募匠教习折”。在这两本奏折中，他指出了厂学兼办的必要性：“兹局之设，所重在学业造西洋机器以成轮船，俾中国得转相授受，为永远之利，非如雇买轮船之徒取消一时可比。”[2]“夫习造轮船，非为造轮船也，欲尽其制造驾驶之术耳，非徒一二人能制造驾驶也，欲广其传，使中国才艺日进，制造驾驶展转授受，传习无穷耳。[3]”可以看出，左宗棠此时已经萌生了一个坚定的念头：中国人应具备轮船自主制造的能力。左宗棠的两本奏折各附有一份清单，其中一份拟定有“求是堂艺局”的章程。

同治五年十一月十七日（1866 年 12 月 23 日）福州船政局在马尾破土动工兴建，“求是堂艺局”也同时开学。

二、福州船政学堂的数学教育

数学教育和外语教育在福州船政学堂的教学中的地位非常重要，左宗棠指出：“一面开设学堂，延致熟悉中外语言文学洋师，教习英、法两国语方文字、算法、画法，名曰求是堂艺局、挑选本地资性聪颖、粗通文字子弟入局肄习。”[4]“宜优待艺局生徒以拔人材也。艺局之没，必学习英、法两国语言文字，精研算学，乃能依书绘图，深明制造之法，并通船主之学，堪任驾驶。”[5]可以看出，左宗棠已经认识到数学在工学教育中的重要性。

船政学堂在开办之初，按左宗棠的意见定名为“求是堂艺局”。最初，学堂并不在马尾。学生们在福州城南定光寺，城内白塔寺、神光寺上课。次年（1867年）9 月，学堂迁入马尾，并分设“法语学校”和“英语学校”。前者后改称为

---

[1]巴斯蒂.清末留欧学生(J).东亚.1985(3). 转引自：陈学恂,田正平.中国近代教育史资料汇编：留学教育[Z].上海教育出版社 1991.264.

[2]左宗棠.左文襄公全集:奏稿卷二十[Z].光绪十六年（1890 年）刊.52-68.转引自：陈学恂.中国近代教育史教学参考资料（上册）[Z].人民教育出版社 1986.67-68.

[3]中国史学会.洋务运动（五）(Z).上海人民出版社，1961.27-29.

[4]左宗棠.左文襄公全集:奏稿卷二十[Z].光绪十六年（1890 年）刊.52-68.转引自：陈学恂.中国近代教育史教学参考资料（上册）[Z].人民教育出版社 1986.67.

[5]中国史学会.洋务运动（五）(Z).上海人民出版社，1961.27-29.

"前学堂"，后者则改称为"后学堂"。

前学堂又分设造船班、绘事院和艺圃，尚法学，用法语授课。

造船班，洋正监督法国人日意格称(Prosper Giquel)称之为"造船学校"，于1867年2月成立，开设圣谕广训、孝经、策论、法语、算术、几何入门、三角、解析几何、微积分、物理、化学、格致、材料配力学、轮机重学、水力重学、机械学、透视绘图学、蒸汽机制造、船体建造等课程。中文课程由中文教师任教，而专业课全部由法国人任教。刚开班时专业课由监督秘书博赖（A. Borel）任教，次年由数学教授迈达（L. Médard）和物理教授录赛（L. Rousset）任教。以后由工程师舒裴（E. Jouvet）、教授德尚、工头马益识（F. Marzin)、总木匠师乐平（M. Robin）任教。造船最初只有12名学业生，两年后增加至71名。

绘事院，日意格称之为"设计专业和设计科"。日意格认为造船的关键不在于具体操作，而在"画图定式，非心通其理，所学仍属皮毛。中国匠人多目不知书，且各事其事，恐他日船成未必能悉全船之款要，故特开画馆二处，择聪颖少年通绘事者教之，一学船图，二学机器图。"[①]这两处画馆以后被称之为绘事院，由工头路易（A. Louis）任教，绘图员凯迪亚昂（Keidiaon）协助。绘事院初期有三个班，共有学生32名。其中一班10人以后转入造船专业。绘事院开设的课程有中文、法语、算术、几何、几何作图、微积分、透视原理、蒸汽机结构、船图和实习课。

艺圃，日意格称之为"学徒班"。首任船政大臣沈葆桢（1820—1879）于同治七年（1868年）七月给同治的奏折中阐明了设置艺圃的缘由："据日意格前称，华匠与洋匠器用不同，语言不通，事事隔阂，况素谙绳墨者类皆中年以往，心气耗散，往往不能探赜通微，清各厂分招十五以上十八以下有膂力悟性者，或十余人或数十人，俾易教导，名曰艺徒。现所招已及百余人，又不能无以钤束，于是复有艺圃之设。"[②]艺圃设立的目的是使青年工人能够识图、作图，计算蒸汽机各种形状、部件的体积和重量，并使他们达到在各自所在车间应具有的技术水平。艺圃开设的课程有法语、算术、几何、几何作图、代数、常用艺学浅议和蒸汽机构造等专业技术课，上课时间为每天上午一个半小时学法语，晚上7点半至9点上普通课程。任课教师除少数专职教员外，多为所在车间的外国技师、工头和领

[①]刘海峰，庄明水. 福建教育史[M]. 福州：福建教育出版社，1996. 235.
[②]刘海峰，庄明水. 福建教育史[M]. 福州：福建教育出版社，1996. 235.

班。

后学堂设置驾驶专业和轮机专业和轮机专业，尚英学，用英语授课。

驾驶专业，日意格称之为“航海学校”或“航海理论学校”，由英国教师嘉乐尔（J.Carroll）负责，并由斯基（M.B.Skey）和罗丰禄协助。驾驶专业开设的课程除圣谕广训、孝经、策论等中文课外，专业课有算术、几何、代数、三角、电学、光学、声学、热学、化学、地理、航术学、国际公法、航海天文气象、航海计算、实习等。

轮机专业，日意格称之为“轮机学校”由阿伦（W.Allan）负责。该专业最初的学生都是由阿伦从上海和香港的工厂中招收的有几年工龄的青年。该专业的培养目标是掌握蒸汽机的理论和实践知识，开设有中文、英语、算术、几何、设计、蒸汽机结构、蒸汽机的操作维修、仪表、实习等课程。

可以看出，在近代工学教育中，数学为基础必修课，这在福州福政学堂的教学中得到了充分的体现。对于数学在船政学堂各专业学习的重要性，日意格也有非常深刻的认识。如对于造船专业，日意格认为该专业的目标是“培养能依靠推理、计算来理解蒸汽机各部件的功能、尺寸，因而能够设计木船船体，并在放样棚里按实际尺寸划样。”[①]因此，数学在该专业各阶段的学习非常重要，如为了计算一个机器零件或船体的尺寸，必须懂得算术和几何。为了照样制造机器零件或建造船体，就得懂得透视绘图学。此外，该专业还要懂得静力学等物理学知识和机械学等技术科学知识。“要具备上述知识，光懂得算术和几何就不够了，必须还懂得三角、解析几何、微积分。这样才不仅能对一具有具体形状和大小的物体进行计算，还能掌握进行各种运算的方式、方法”[②]又如驾驶专业，日意格认为：“当航海人员看到海岸时，他可以选择几个观测点，用直线三角学测出船只和陆地的距离，而要学会这点，就必须先学会算术、几何和代数。如果要用太阳、月亮、星星导航，就要用天文学知识找出这些天体的位置及运转规律，还要用球面三角学测出它们在地坪线上的高度或距离。航海理论使航海人员能利用这些手段、观测方法、测程器的数学，确定他的船只的位置。”所以本专业的数学知识

[①] 日意格.福州船政局[M].转引自：福建师范大学历史系.福建船政局资料汇编(三)庚类[Z]. 10.或参见：陈学恂.中国近代教育史教学参考资料（上册）[Z].北京：人民教育出版社 1986.74-75.

[②] 日意格.福州船政局[M].转引自：福建师范大学历史系.福建船政局资料汇编(三)庚类[Z]. 10.或参见：陈学恂.中国近代教育史教学参考资料（上册）[Z].北京：人民教育出版社 1986.74-75.

和其它专业课“对航海人员都是主要的。”[①]

甲午战争后，为了适应新的形势，1897 年，船政学堂的章程进行了改革。学校章程在课程学制方面比初期较为明确完善。如章程规定前学堂学制六年，分第一阶段和第二阶段。第一阶段仿照法国初学学堂课程设置，学习数学入门、几何入门、格致浅语。第二阶段仿照法国水师学堂课程设置，学习代数、平面和立体几何、三角学、画法几何等初等数学课程和和重学业格物入门、化学入门等理化课程。到第五、六年则学习高等代数、微积分等高等数学课程和重学、化学、格物等理化课程。除学习自然科学外，每日兼习汉文。可以看出，课程设置贯彻了“循序肄业”的教学原则，比起十九世纪六十年代是一个很大的进步。至此，船政学堂有了比较确定的教学体制。船政学堂的体制进行了改革，数学作为基础必修课的地位也得到了加强。

船政学堂的学制在此时得到优化，但规模却远不如以前。1902 年，在校学生仅有七八十名，而在此前，多年未见招生，1902 年才恢复招生七十名。到了 1907 年后，船政局处于停滞状态，学堂也随之处于维持残局状态。经费短缺、教师老化、课本陈旧困扰着船政学堂。辛亥革命之后，清朝被推翻。1912 年北洋政府海军部决定，把福州船政学堂从福州船政局中分离出来，并把福州船政学堂分拆成福州制造学校（原为前学堂）、福州海军学校（原为后学堂）、福州海军艺术学校（原为艺圃）3 个独立学校，由海军部直接管辖。这样，福州船政学堂走完了它的全部历程，前后共历 46 年。

在福州船政学堂的历史中，留学教育是不可或缺的组成部分。自 1877 年至 1898 年，船政学堂先后派出 4 批留学生赴英、法、德等国留学业，船政学生留欧的主张，是首任船政大臣沈葆桢提出的。在 1872—1873 年间，沈葆桢就认为，聘请外国教师，“未必非上上之技，”“选通晓制造驾驶之艺童，辅以年少技优这工匠，移洋人薪水为之经费，以中国已成之技求外国益精之学”[②]。派出学业有所成的前、后学堂学生，到外国深造，可以“窥其精微之奥，宜置之庄岳之间，”[③]三、五年后“有外国学成而归者，则以学堂后进之可造者补之，斯人才源源而

[①] 日意格.福州船政局[M].转引自：福建师范大学历史系.福建船政局资料汇编(三)庚类[Z]. 10.或参见：陈学恂.中国近代教育史教学参考资料（上册）[Z].北京：人民教育出版社,1986.76

[②] 刘海峰,庄明水.福建教育史[M].福州：福建教育出版社,1996.242.

[③] 刘海峰,庄明水.福建教育史[M].福州：福建教育出版社,1996.242.

来，朝廷不乏于用。”[1]。后在李鸿章等人的支持下，清廷才于1877年批准派遣船政学生留学英法。不过在此前，以各种形式派出少数学生实际已在进行。如1875年，沈葆桢令日意格趁回国采购之便，挑选魏瀚、陈兆翱、陈季同、刘步蟾、林泰曾五名学生随其出国学习。这五名属于船政学堂中的最优秀的学生群体，他们的知识，特别是数学方面表现出的才能，使与他们一起学习的外国士官非常吃惊[2]。

在这四批留学生中，大部分人在外国仍然学习工学，数学也是他们学习的必修基础课。如首批造船专业的留学生，数学课程有画影勾股；留学的艺徒，数学课程有算学、勾股、画影勾股。在首批留学生中，最有名的是福建侯官人严复。严复最初入朴茨茅斯专门学校学习，之后又转入格林威治海军专门学校，专攻数学和自然科学。另外，船政学堂也有极少数留学生以应用数学为专业。如第三批中的郑守箴、林振峰二人学习海军制造、算学、化学、格物；伍光鉴、陈燕年（陈伯函）、曹廉正三人学习水师兵船、算学、格物。有人认为郑守箴、林振峰的数学成就非常突出，如巴斯蒂称："1887年，有两名[3]作为私费旁听生进入高等师范学校科学系学习，第二年，他们通过了数学和物理学的第一次学士学位考试。很遗憾，在当时这一成果并未引起人们的足够重视。"[4]巴黎高等师范学校是世界著名的学术重镇，数学、科学、哲学等人类学术领域的大师辈出，能取得其学士学位是特别不易的。在上述五人中，林振峰回国后，朝廷授予其算学物理举人。他毕业后致力教育，先后在福州、济南执教数十年。福州流传的“马尾算”，就是他发明的。

第二节 “戊戌维新”后的福建近代数学教育

中国在中日甲午战争的战败导致洋务运动的破产。国人中的有识之士认识到，在封建制度内进行修修补补，中国无法抵御外侮。中国要救亡图存，富国强兵，必须废科举，兴新学，进行全方位的改革，实行全面维新。光绪二十二年（1896

[1] 中国近代史资料汇编:《海防档》(乙):《福州船厂》[Z].台北,1957.473.转引自：陈学恂,田正平.中国近代教育史资料汇编：留学教育[Z].上海教育出版社 1991.225.

[2] 巴斯蒂.清末留欧学生(J).东亚.1985(3). 转引自：陈学恂,田正平.中国近代教育史资料汇编：留学教育[Z].上海教育出版社 1991.261.

[3] 指郑守箴、林振峰二人。

[4] 巴斯蒂.清末留欧学生(J).东亚.1985(3). 转引自：陈学恂,田正平.中国近代教育史资料汇编：留学教育[Z].上海教育出版社 1991.264.

年)，维新派领袖梁启超在《论科举》、《学校总论》等文章中大声疾呼："欲兴学校，养人才以强中国，惟变科举为第一义。"并提出举办大、中、小学堂的具体方案。光绪二十四年（1898 年)，另一位维新领袖康有为在《请废八股试帖楷法试士改用策论折》、《请开学校折》，也呼吁要废科举，兴新学。他也提出了大办学堂的初步意见。此外，严复早在光绪二十一年（1895 年）也痛陈八股的危害，并高呼"痛除八股而大讲西学。"[①]

面对内外交困的危局，光绪皇帝也下定决心变法，但他知道，变法必然会遭到顽固派极力反对。光绪皇帝直到光绪二十四年（1898 年）才认为变法的时机已经成熟，他根据维新派的建议，于阴历四月二十三日下定国事之诏："数年以来，中外臣工讲求时务，多主变法自强。迩者诏书数下，如开特科，冗兵，改武科制度，立大小学堂，皆经再三审定，筹之至熟，甫议施行……[②]"在定国事之诏中，他还命令筹办京师大学堂。光绪二十四年阴历五月至七月，光绪皇帝连续下诏变法。教育改革是变法的重要方面，其措施主要有：废八股，改试策论，选拔体用兼备的人才；省、府、州、县的大小书院，一律改为兼习中、西学的学堂，省城的大书院改为高等学堂，府郡书院改为中学堂，州县书院改为小学堂，奖励绅民捐建学堂；设立经济特科，培养"通经济变"的人才；筹办京师大学堂；各省创办专门学堂；设立农学会，刊发农报，建立农务学堂；筹办茶务学堂和蚕桑学堂；设立编译学堂；准许自由开设报馆及学会，出版书籍报纸皆予免税等等。上述改革措施对我国教育产生了深远的影响。数学思想的变化也反映在数学教育的改革之中。

为了回应变法，福建省的维新派人士也在戊戌变法的前后筹建了一批新式学堂。福州苍霞精舍、福州东文学堂、厦门同文书院是其中的代表。在这些学堂中，数学作为新学的一部分，已经成为新式人才素质培养的不可缺少的组成部分。这在各学堂的课程中都得到了体现。如 1896 年林纾等人创立的苍霞精舍开设有中、西两类课程，其中国学有经、史、时务等课；西学有英文、日文、算学、地理等课。在教师中，林纾、黄永筠、林海珊等任国文教员，何天增任算学、英文教员。1898 年创立的福州东文学堂开设有东语（日语)、读书、习字、学文、翻译、西

[①] 严复.救亡决论(A).严复集（第 1 册）[C].转引自：刘海峰,庄明水.福建教育史[M].福建教育出版社,1996.251-252.

[②] 梁启超.戊戌政变纪事本末(A).中国近代史料丛刊：《戊戌变法》（一）[Z].上海人民出版社,1957.315-323.

文、外国史、数学及经义、子书、通鉴、文献通考、本朝圣训、名臣奏议、历代经世文、兼试策论等。

由于顽固派的强烈反对，“戊戌变法”在发动百日之后归于失败。顽固派的首领慈禧太后发动戊戌政变，囚光绪于中南海瀛台，捕杀变法领导人，下令废除新法，并全面恢复旧制。但时局使改革的潮流不可阻挡。“戊戌变法”失败后不久，八国联军进攻北京。慈禧太后逃往西安，派李鸿章向联军求和。李鸿章签订了丧权辱国的“辛丑条约”。慈禧太后和清廷对变法的态度发生了改变。《清史稿》称清廷“以创痛巨深，力求改革。”[①]光绪二十七年(1901 年)阴历十二月，朝廷任命张百熙为管学大臣，并责成其裁定教育章程。光绪二十八年（1902 年）七月，张百熙根据古今中外教育制度拟定成一个教育章程，清廷定此章程为《钦定学堂章程》，并令各省按章程执行。《钦定学堂章程》又称“壬寅学制”。该学制划分学校为七级：蒙学堂 4 年，寻常小学堂 3 年，高等小学堂 3 年，中学堂 4 年，高等学堂及大学预科 3 年，大学堂 3 年。此外，与中学堂并行的有中等实业学堂和师范学堂，与大学堂并行的有高等实业学堂和师范馆。“壬寅学制”是我国第一个统一制定的新学制，在中国教育史上影响深远。《清史稿》称“教育之有系统自此始。”但“壬寅学制”并没有在全国广泛实行就被光绪二十九年（1903 年）的新学制所取代。1903 年，清廷命张百熙、容庆和张之洞三人合作重新修订学堂章程。新章程名《奏定学堂章程》，又称“癸卯学制”。“癸卯学制”是我国第一个在全国范围内广泛实行的学制，其实际影响远远超过了“壬寅学制”。“癸卯学制”把学校也分成七级：蒙养院 4 年，初等小学 5 年，高等小学 4 年，中学堂 5 年，高等学堂或大学预科 3 年，分科大学及大学选科 3 至 4 年，通儒院 5 年。此外，与高等小学堂并行的有初等实业学堂、实业补习普通学堂，与中学堂并行的有初等师范学堂、中等实业学堂，与分科大学并行的有优级师范学堂、高等实业学堂及译学馆、方言学堂等。在教育改革方面，除了建立近代学制外，清廷于 1905 年正式废除了科举。

自二十世纪开始，特别是“壬寅学制”和“癸卯学制”颁布后，福建省立即掀起了一股办新式学堂的热潮。在二十世纪初的十余年时间，福建省基本建成了初具规模的近代学校教育网。对数学教育而言，从普通的初等数学教育到高等数

[①] 清史稿:卷一百七,志八十二,选举二[M].中华书局,1977.3127-3146

学教育，从附属于各专业的实用数学教育到专门的数学教育等各级各类数学教育的体系也随之建立。这其中，都有反映和体现出这个时期的数学思想。

1、小学数学教育

自二十世纪初到民国初年，福建的小学教育发展迅猛，据光绪三十三年的统计材料记载，光绪二十八年，福建省仅有三所官立小学，光绪三十三年已经发展至官、公、私立小学340所[①]。此时的小学教育，基本按部颁章程安排。初等小学堂的课程设置8门，即修身、读经讲经、中国文学、算术、历史、地理、格致、体操。高等小学堂设置9门课，即修身、读经讲经、中国文学、算术、中国历史、地理、格致、图画、体操。以上为小学完全科。此外，为了照顾全国经济落后、师资贫乏的地区，宣统元年，清廷在这些地区设立了小学简易科。课程设置也作了调整：修身、读经合为一科，中国文学、历史、地理、格致合为一科，算术、体操不变。小学简易科5年毕业。可以看出，数学教育已经是普通小学教育不可缺少的组成部分。在当时，小学教育爆发式发展，教科书十分短缺。商务印书馆编译所按照学期制度编写修身、国文、算术、历史、地理、格致诸种教科书，定名为《最新教科书》，为全国广泛采用，大大缓解了教科书的奇缺。在初等小学方面，《最新教科书》的数学部分有《算术教科书》五册，《珠算教科书》二册；在高等小学方面，《最新教科书》的数学部分为张景良编的《算术》三册和黄启明编的《珠算》四册。

2、中学数学教育

福建的近代中学教育正式始于光绪二十八年（1902年）。1902年，福建省仅有一所中学，此中学名为福宁府中学堂，创立于本年，在校生仅27名。但到光绪三十三年，福建官、公立中学有14所，在校生1100余人[②]。可以看出，此时福建整个中学教育规模还是很小，但发展很快。中学堂的课程设置，按朝廷颁布的《奏定中学堂章程》规定进行，开设修身、读经讲经、中国文学、外国语、历史、地理、算学、博物、物理及化学、法制及理财、图画、体操12门课。中学堂教科书，统一采用官设编译局编写的课本，其中数学课本为《算术》，内容有算术、代数、几何、三角、珠算、薄记等。数学教育也是中学教育不可缺少的组

[①] 光绪三十三年分第一次教育统计图表[Z].转引自：刘海峰,庄明水.福建教育史[M].福建教育出版社,1996.275.

[②] 刘海峰,庄明水.福建教育史[M].福建教育出版社,1996.273.

成部分。

3、师范数学教育

福建晚清的师范教育，分成高等师范教育和初等师范教育两个部分。

福建的高等师范教育始于光绪三十三年（1907 年）福建优级师范学堂的创立。按照光绪二十九年（1904 年）颁布的《奏定优级师范学堂章程》规定，优级师范学堂的招生对象为初等师范学堂的毕业生和普通中学毕业生，其目的为初等师范学堂和中学培养师资；优级师范学堂在京师和各省的省会可以各设一所。根据上述规定，福建省于光绪三十三年（1907 年）在福建师范学堂的基础上增设优级师范选科，并改校名为福建优级师范学堂。光绪 33 年，福建两级师范学堂设数学选科，是福建高等院校最早设数学专业科系的学校。

福建优级师范学堂先后开设 6 个专业，其中理化、博物、史地、数学专业为选科，另一博物专业为本科，此外，还设有图画手工专修科。数学选科于宣统元年开始招生。优级师范学堂的历届毕业生有 238 人，其中数学选科 46 人。数学课程在理化选科有开设，包括代数、几何、三角、微积分初步。在数学选科，开设的数学课程更多更深，大部分为高等数学。

福建的初等师范教育始于光绪二十九年（1903 年）全闽师范学堂的创立。全闽师范学堂的前身为东文学堂（见本节前面有关部分），后于 1906 年改名为福建师范学堂。福建师范学堂的课程设置，根据《奏定初级师范学堂章程》的有关规定，略加修订而成。师范完全科开有修身、读经讲经、中国文学、教育、历史、地理、算学、博物、物理及化学、习字、图画、体操、外国语、农商工业、乐歌十五门课。其中算学的教学内容为算术、代数、几何、三角和薄记学，算学五学年都要上，每周授课三学时，约占总学时的十二分之一，在十五门课中，仅比读经讲经和教育学的学时少。师范简易科开设修身、教育、中国文学、历史、地理、算学、格致、图画、体操九门课，学制为一年。算学的教学内容为加减乘除、分数、小数、比例、开方。算学每周授课六学时，占总学时的六分之一，在九门课中，仅比教育的学时少。

福建师范学堂和福建优级师范学堂对后来的福建师范教育有一定的示范作用。民国初年的初等师范教育与福建师范教育学堂开设的课程基本相同。福建的高等师范教育在民国初年逐渐衰落，到 1915 年，则完全撤销了。直至 1921 年，

陈嘉庚先生创办私立厦门大学师范学部，1925 年增办私立集美高级师范选科，福建的高等师范教育才有所恢复。厦门大学师范学部在 1922 年至 1926 年间先后易名为教育学部、教育学科、教育学系、教育学科。师范学部在招生考试时，算学仅作为选考科目。师范学部开设的课程偏重于教育学和心理学方面，没有数学。集美高级师范选科分成甲、乙、丙三个系，下设文、理、史、地、艺术、教育等专业，这些专业有某些共同的必修课，还要修所在系的必修专业课。数学课程只在乙系开设，包括平面三角、立体几何、大代数、解析几何、微积分大意。

4、高级专门的数学教育

福建近代高等教育始于光绪二十八年（1902 年）创办的全闽大学堂。全闽大学堂在办学模式上模仿京师大学堂，是福建省第一所正式的高等学堂，也是福建省第一所综合性大学。全闽大学堂后易名为全闽高等学堂和福建高等学堂，首届招生 109 名。国学课程由中国人讲授；外语、算学、理化、地理等课程由洋教习和留学人员讲授。全闽大学堂的专业分文、实二科，算学属实科。但全闽大学堂仅为大学的预科，实际上只有中学程度，为京师大学堂选拔人才或为留学作准备，不可能培养出真正的高级数学专门人才。福建真正的高级数学专门人才的培养始于后来创办的三所综合性大学，这三所大学分别是美国基督教美以美会于 1908 年创办的华南女子学院、美以美会和中华圣公会等 4 公会于 1916 年在福州创办的福建协和大学、陈嘉庚先生于 1921 年创办的厦门大学。华南女子学院的数理系于 1928 年创办。福建协和大学的数理学系至迟不会超过 1926 年创办，其学士学位的授予权得到了美国纽约邦大学院的批准。1923 年，厦门大学理科设算学系，1930 年改名为数学系。自此，福建有了自己的高级数学专门人才的培养基地。

结论：福建传统数学思想概述

把中国传统数学思想作为参照，福建传统数学思想的基本特色可以凸现出来。作为中国传统数学思想的有机部分，一方面，它以中国传统数学思想为活水源头，反映了中国传统数学思想的某些特色；另一方面，它的发展具有相对的独立性，在其发展历程中表现出某种鲜明的区域性特点，从而作为中国传统数学思想之源而融入于其中。

一、作为中国传统数学思想之流的福建传统数学思想

福建传统数学虽然较迟才开始发展，但也吸收了我国传统数学思想的优良传统，作为中国传统数学思想之流的福建传统数学思想表现为如下几个方面：

1、数学与实际应用紧密结合。“中国古代数学依赖于生产实践，又转过来为生产实践服务。理论结合实际，在数学发展中常起主导作用.”[①]与实际相结合是我国传统数学思想的重要特色。作为区域性的福建传统数学也致力于数学的广泛应用。早在北宋，苏颂以几何学知识为基础，运用工程图学知识设计水运仪象台；以运筹规划思想为基础，合理安排施工方案建造水运仪象台。数学知识的全面运用是苏颂等人完成这一天文仪器中的建造的必要条件。阮逸等人将《九章算术》中的数学知识运用于三分损益律管的改造中去，实现了管律和弦律的进一步近似。在南宋，蔡元定也将数学知识运用于律学中去，他和阮逸等人为明代的朱载堉登上中国传统律学高峰奠定了坚实的基础。在明代，珠算家徐心鲁和柯尚迁更是把数学运用于日常生活和商业的实际中去。到了清代，以李光地等人为主“安溪之学”的文人数学家群体也注意数学的运用，在他们之中，李鼎征、陈亮世运用数学于工程建造和工程结算中。庄亨阳把数学与本职工作紧密地结合起来，为治水工作作出了重大的贡献。陈际新虽然在纯数学方面取得了很大的成就，但他也注意将数学运用于天文计算中。丁拱辰把数学运用于炮术、炮法中去，写成了《演炮图说辑要》，为清代我国的国防事业作出了杰出的贡献。

2、数学与天文历法的研究相结合。李约瑟曾说过：，“很明显的是，在整个

[①] 钱宝琮.中国数学史[M].北京：科学出版社 1981.27.

中国历史中，数学的重要性主要是在于与历法有关。”[①]福建古代的历代数学家们大都继承了这一优良传统，并有所发挥。早在唐、五代，黄岳、陈陶、龚颖等人已将天算结合起来研究。到了宋代，苏颂采用坐标的思想方法和复杂的数学计算，绘制出当时世界上先进的星图。宋代八闽的天算学家更是人才辈出。王普、余嘉、林霆、邹淮、邱崇等人是其中的代表。在元代、明代，福建的数学处于衰退时期，但仍有郑善夫、罗明祖等天算学家出现。在清代，“安溪之学”的数学家们更是广泛地将数学和历法研究结合起来。陈际新师从明安图，他的数学水平非常高深，他曾在钦天监任职多年，数学与天文之间的结合研究是他的本职工作。《割圆密率捷法》的“用法”章有数道三角学知识进行天文计算的例题。庄亨阳在《庄氏算学》的“七政经纬”章中专门讨论天文学。

3、注重精密的数学计算。早在南北朝时代，祖冲之用算筹等计算工具将圆周率推算到小数点后七位。福建古代的数学家们很好的继承了我国古代数学善于计算的优良传统。通过精密的数学计算，福建古代的数学家们取得了多项出色的科学成就。在这个方面，苏颂、蔡元定、陈际新、庄亨阳等人的工作有一定的代表性。苏颂领导建造的水运仪象台的传动装置是一个主要由齿轮组成的复杂系统。只有严密精确的计算，才能使水运仪象台各部件很好地整合在一起，从而实现水运仪象台候天功能。蔡元定用九进制进行律数的计算，在律的计算技巧方面有很大的改进。庄亨阳在《庄氏算学》中，用比较精确的圆周率计算。在这些人当中，陈际新的计算能力更是突出。陈际新用递推法算出了 48 项商位系数，最大的达 54 位。今人用计算机检验了这些结果，其精确度令人吃惊。

二、作为中国传统数学思想之源的福建传统数学思想

福建传统数学思想不仅在福建科学思想史具有重要的地位，而且有些也影响了中国传统数学思想发展进程，是中国传统数学思想之源。对此，我们可以以几部较权威的中国数学通史著作为证。在《中国数学大纲》中，李俨先生为鲍澣之、徐心鲁、柯尚迁、庄亨阳、陈际新等人编了小传。钱宝琮先生主编的《中国数学史》也为鲍澣之、徐心鲁、柯尚迁、庄亨阳、陈际新等人编写了索引。在《畴人传》（包括《续畴人传》等）中，阮元等人为苏颂、鲍澣之、郑善夫、李光地、

[①] [英]李约瑟.中国科学技术史,第三卷[M].科学出版社,1978.339

陈万策、庄亨阳、陈际新等福建天算学家编写了传记。作为中国传统数学思想之源的福建传统数学思想表现为如下几个方面：

1、鲍澣之刊刻“算经十书”。“算经十书” 是祖国数学和数学思想的珍贵宝藏。南宋鲍澣之在福建汀洲刊刻“算经十书”确实是中国数学史上的一项伟业，使当时处于岌岌可危的数学事业得以传承和发展。李俨先生在《中国数学史大纲》中对宋刊“算经十书”列有专节讨论，他认为这件事在中国数学史中的地位非常重要。宋刊“算经十书”分北宋和南宋两个时期，鲍澣之在南宋刊刻“算经十书”是其中最重要的一项。目前流传的“算经十书”，多是以南宋的版本作为母本不断翻印，流传下来的。鲍澣之利用福建当时发达的造纸业和雕版印刷业，在汀洲刊刻“算经十书”，这项成就具有浓郁的福建地域特色。

2、徐心鲁、柯尚迁的珠算。徐心鲁、柯尚迁的珠算成就由于他们的著作《盘珠算法》和《数学通轨》被埋没多年，长期无人所识。实际上《盘珠算法》和《数学通轨》是现存世上最早的珠算著作，在中国数学史和中国珠算史上的地位非常重要。《盘珠算法》和《数学通轨》使珠算口诀规范化，使珠算学习定型化，后来的珠算著作的珠算口诀大都与《盘珠算法》和《数学通轨》给出的口诀相同。

3、庄亨阳的中西算结合研究。庄亨阳的《庄氏算学》是在吸收《数理精蕴》的思想精粹后而写成的著作。按理说，《庄氏算学》应该作为中国传统数学之流。但《庄氏算学》的成就比较突出。我们认为，庄亨阳的某些思想方法作为中国传统数学之源比较合适。庄亨阳把当时传入西算和中国传统数学熔入一炉，他发展了极限的数学思想并推广了祖暅原理，完成了多种平面图形的面积公式与多种立体的表面积和体积公式的证明。

4、陈际新的无穷级数研究。这是福建人对中国传统数学的最大贡献。陈际新等人在吸收西算的思想方法的基础上，与中国传统数学的思想方法结合起来，完成了“杜氏九术”的证明，开辟了清代无穷级数研究的先河。在思想方法上，陈际新等人突破我国传统数学的几何代数化的模式，而采用西方古希腊以来传统的代数几何化方法，把要求的三角函数的级数展开式问题转化为几何问题。在思想方法上，这是一项伟大的创新。清代数学家们取得了许多类似微积分的成果，是通过研究无穷级数实现的。而陈际新等人的工作，是所有这些工作的起点。

参考文献

[1](唐)李延寿.北史[M]. 北京：中华书局,1974.

[2](唐)魏徵,(唐)令狐裘德.隋书[M].北京：中华书局，1982.

[3](宋)叶梦得.石林燕语[M].北京：中华书局,1984,

[4](宋)苏颂.苏魏公文集[M].北京：中华书局,1988.

[5](宋)苏颂.新仪象法要[M].北京：中华书局,1985.

[6](宋)阮逸,胡瑗. 皇祐新乐图记[M].北京：中华书局,1985.

[7](宋)蔡元定.律吕新书[M].清乾隆刻本,中国艺术研究院音乐研究所资料馆藏.

[8](元)脱脱等.宋史 [M]. 北京：中华书局,1977.

[9](明)徐心鲁.盘珠算法[M].李俨影摄本。原本为1573年刻本，藏于日本内阁文库。

[10](明)柯尚迁.数学通轨[M].李俨抄本。原本为1578年刻本，藏于日本“林崎文库”。

[11](清)阮元.畴人传[M].北京：中华书局，1991.

[12](清)罗士琳.续畴人传[M].北京：中华书局，1991.

[13](清)周学曾.晋江县志[M].福州：福建人民出版社,1990.

[14](清)柳正芳.建阳县志 [M].清康熙四十三年刻本.

[15](清)庄成.安溪县志[M].乾隆丁丑版,福建省安溪县志编纂委员会整理.厦门大学出版社,1988.

[16](清)李光地.榕村集,卷三十六[M]. 景印文渊阁四库全书,1324：集部，二六三：别集类.台湾商务印书馆.

[17](清)李光地.历象本要·梅瑴成序[M].乾隆刊本.

[18](清)李光地.榕村语录 榕村续语录[M].北京：中华书局,1995.

[19](清)李清植.李文贞公（光地）年谱[M].台北：文海出版社,中华民国五十五年.

[20](清)梁启超.清代学术概论[M].上海：上海古籍出版社，1988.

[21](清)魏源. 诸子集成 [M]. 上海：上海书店出版社，1986.

[22]赵尔巽.清史稿[M].北京：中华书局,1977.

[23](清)梅文鼎.绩学堂文钞，卷一[M].四库全书存目丛书，集部，第263册.济南：齐鲁书社，1997.

[24]中国近代史料丛刊：《戊戌变法》（一）[Z].上海：上海人民出版社,1957.

[25]中国史学会.洋务运动（三）[Z].上海：上海人民出版社，1961.

[26]李俨.中国古代数学史料[M].上海：中国科学图书仪器公司，1954.

[27]李俨.中算史论丛[C].北京：科学出版社,1955.

[28]李俨.中国数学大纲[M].北京：科学出版社,1958.

[29]李俨,杜石然.中国古代数学简史[M].北京：中华书局,1963.

[30]李俨,钱宝琮.李俨 钱宝琮科学史全集[Z].沈阳：辽宁教育出版社,1998.

[31]钱宝琮.钱宝琮校点《算经十书》[M].沈阳：辽宁教育出版社,1998.

[32]钱宝琮. 中国数学史[M]. 北京：科学出版社，1981.

[33][英]李约瑟.中国科学技术史,第三卷:数学[M].北京：科学出版社，1978.

[34][英]李约瑟.中国科学技术史,第四卷：天学（第二分册）[M]. 北京：科学出版社,1975.

[35][英]李约瑟.中国科学技术史,第2卷：科学思想卷[M].北京：科学出版社，1990.

[36][英]亚·沃尔夫.十八世纪科学 技术和哲学史[M].北京：商务印书馆,1991.

[37]李迪.中华传统数学文献精选导读[C].武汉：湖北教育出版社,1999.

[38]卢嘉锡,陈美东.中国科学技术史（天文学卷）[M].北京：科学出版社.2003.

[39]中国科学院自然科学史研究所.钱宝琮科学史论文选集[C].北京：科学出版社，1983.

[40]吴文俊,白尚恕.中国数学史大系[M].北京：北京师范大学出版社，1998.

[41](清)明安图,陈际新.割圆密率捷法.浙江图书馆藏,清道光十九年石梁岑氏刻本.

[42]吴文俊.《九章算术》与刘徽[C].北京：北京师范大学出版社,1982.

[43]谢水顺等.福建古代刻书[M].福州：福建人民出版社,1997.

[44]王振铎.科技考古论丛[C].北京：文物出版社，1989.

[45]庄添全等.苏颂研究文集[C].厦门：鹭江出版社,1993.

[46]紫金山天文台.1981年中国天文年历[Z].北京:科学出版社,1980.

[47]席泽宗.敦煌星图[J].文物，1966（3）

[48]席泽宗.中国科学技术史·科学思想卷[M].北京：科学出版社,2001.

[49]《科技史文集》第十辑[C].上海：上海科学技术出版社,1983.

[50]郭金彬,孔国平.中国传统数学思想史[M].北京:科学出版社,2004.

[51]刘仙洲.中国工程机械发明史[M].科学出版社,1962。

[52]卢嘉锡,陆敬严,华觉明,钱小康,张柏春.中国科学技术史（机械卷）[M].北京:科学出版社,2000.

[53]戴念祖.中国声学史[M].石家庄:河北教育出版社，1994.

[54]马大猷.声学手册[M].北京：科学出版社，1983.

[55]吉联抗辑译.宋明音乐史料[M].上海：上海文艺出版社 1986.

[56]杨荫浏.中国古代音乐史稿（上册）[M].北京：人民音乐出版社，1981.

[57]华印椿.中国珠算史稿[M]. 北京：中国财政经济出版社,1987.

[58]李培业.唐代创始算盘论[J].珠算研究.1982(3).

[59]王文素.通证古今算学宝鉴·卷五[M].北京图书馆藏.

[60]林金水,谢必震.福建对外文化交流史[M].福州:福建教育出版社,1997.

[61]林金水.利玛窦和中国[M].北京：中国社会科学出版社,1996.

[62]金秋朋.中国科学技术史（人物卷）[M].北京：科学出版社,1998.

[63]周济.福建科学技术史研究[C].厦门：厦门大学出版社,1990.

[64]郑丰稔.南靖县志（民国稿本）[M].福建省南靖县地方志编纂委员会整理.1994.

[65]孙毓棠.中国近代工业史资料：第一辑（上册）[Z].北京：科学出版社,1957.

[66]陈学恂,田正平.中国近代教育史资料汇编：留学教育[Z].上海：上海教育出版,1991.

[67]刘海峰,庄明水.福建教育史[M].福州：福建教育出版社,1996.

[68]陈学恂.中国近代教育史教学参考资料（上册）[Z].北京：人民教育出版社,1986.

[69]袁运开，周翰光.中国科学思想史[M].合肥：安徽科学技术出版社,1998,2000,2001.

[70][英]斯科特.数学史[M]. 北京：商务印书馆.1981.

[71][瑞典]L. 戈丁；胡作玄译.数学概观[M].北京：科学出版社.2001.

[72]吕子方.中国科学技术史论文集[C].成都:四川人民出版社,1983.

[73]郭金彬."算经十书"思想简论[J].厦门大学学报(哲学社会科学版)2003(01):100-107.

[74]施若谷.《新仪象法要》评述[J].自然辩证法通讯,2000(4):72

[75]管成学,杨荣垓,苏克福.苏颂与《新仪象法要》[M].长春：吉林文史出版社,1991.

[76]郭金彬.中国近代的级数展开式研究[J].自然辩证法通讯,1991(6):53-59.

[77](清)李光地.周易折中[M].北京:九州出版社,2002.

[78](清)周学曾.晋江县志：文苑之一 [M].福州：福建人民出版社,1990.

[79](南宋)杨辉.杨辉算法六卷[M].清道光二十二年刻宜稼堂丛书本.

[80](元)安正斋.详明算法二卷[M].自然科学所藏抄本.

[81](元)贾亨.算法全能集二卷[M].南京图书馆藏明初刻本.

[82](元)朱世杰 (清)罗士琳附释.新编算学启蒙三卷总括一卷[M].北京大学图书馆藏清道光十九年刻本.

[83](明)吴敬.九章详注比类算法大全十卷 乘除开方起例一卷[M].上海图书馆藏明景泰元年王均刻弘治元年吴讷补修本.

[84](明)程大位.新编直指算法统宗十七卷首一卷[M].清康熙五十五年刻本.

[85](元)脱脱等.金史[M].北京:中华书局,1975.

[86] Paulus Gerdes. Ethnomathematics as a new research field, illustrated by studies of mathematical ideas in African history[A]. New trends in the history and philosophy of mathematics[C].Studies in Philosophy.135—161.University of Southern Denmark

[87]John Stillwell. Mathematics and its history, second edition[M]. Springer, 2002.

[88] Ubiratan D'Ambrosio. Ethnoscience and ethnomathematics: the evolution of modes of thought in the last five hundred years[A]. Studies in history of mathematics dedicated to A. P. Youschkevitch[C]. De Diversis Artibus, 56, Brepols, Turnhout, 2002.

[89] Edwin J. Van Kley. East and West. Mathematics across cultures[A]. Science Across Cultures: the History of Non-Western Science[C]. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000. 23—35.

[90] Paulus Gerdes. Survey of current work on ethnomathematics[A]. Ethnomathematics[C]. SUNY Ser. Reform Math. Educ., SUNY Press, Albany, NY, 1997. 331—371.

[91] Marcia Ascher, Robert Ascher. Ethnomathematics[J]. Hist. of Sci. 24 (1986), no. 64, part 2, 125—144; Ethnomathematics, 25—50, SUNY Ser. Reform Math. Educ., SUNY Press, Albany, NY, 1997.

[92]Ubiratan D'Ambrosio. Ethnomathematics: an explanation. Vita mathematica[Z]. Toronto, ON, 1992; Quebec City, PQ, 1992. 245—250, MAA Notes, 40, Math. Assoc. America, Washington, DC, 1996.

[93] Ubiratan D'Ambrosio. Ethnomathematics, the nature of mathematics and mathematics education[A]. Mathematics, education and philosophy[C]Stud. Math. Ed. Ser., 3, Falmer, London, 1994. 230—242.

[94] Marcia Ascher. Ethnomathematics. A multicultural view of mathematical ideas[M]. Chapman & Hall, New York, 1991.

[95] Ubiratan D'Ambrosio. The history of mathematics and ethnomathematics. How a native culture intervenes in the process of learning science[J]. Impact Sci. Soc. No. 160 (1990). 369--377.

[96] Paulus P. J. Gerdes. On ethnomathematical research and symmetry[J]. Symmetry in a kaleidoscope, Symmetry Cult. Sci. 1 (1990), no. 2, 154—170.

[97]J-C Martzloff. A history of Chinese mathematics[M]. Berlin-Heidelberg, 1997.

[98]M-K Siu, Success and failure of Xu Guang-qi : response to the first dissemination of European science in Ming China[J]. Stud. Hist. Med. Sci. (N.S.) 14 (1-2) (1995/96). 137-179.

[99]P Y Ho, Li, Qi , Shu . An Introduction to Science and Civilization in China [M]. Hong Kong, 1985.

[100]U Libbrecht. Chinese Mathematics in the Thirteenth Century : The Shu-shu

chiu-chang of Ch'iu Chiu-shao[M].Cambridge, Massachusetts, 1973.

[101]R Calinger.A contextual history of mathematics[M]. New York, 1999.

[102]D Bodde. Chinese Thought, Society and Science : The Intellectual and Social Background of Science and Technology in Pre-Modern China[M].Honolulu, 1991.

[102]C Cullen.Astronomy and Mathematics in Ancient China[M]. Cambridge, 1996.

[103]L Y Lam , T S Ang.Fleeting footsteps : Tracing the conception of arithmetic and algebra in ancient China[M].River Edge, NJ, 1992.

[104]N Sivin.Cosmos and early Chinese mathematical astronomy[M]. Leiden, 1969.

[105]N Sivin.Science and technology in East Asia [A].New York,1977.

[106]J Needham.Science and Civilisation in China 3 [M].Cambridge, 1959.

[107]Y Mikami.The Development of Mathematics in China and Japan[M].New York, 1974.

[108]Yan Hong-Sen, Lin Tsung-Yi.A study on ancient Chinese time laws and the time-telling system of Su Song's clock tower[J]. Mech. Mach. Theory 37 (2002), no. 1, 15—33.

致 谢

“时光如箭，日月如梭。”转瞬之间，三年美好的时光已经逝去。在即将完成学业之际，要感谢的人实在太多了！

感谢恩师郭金彬教授。世事难料，命运难测。在厦大，我碰到了我一生最好的老师—郭老师。对待学生，郭老师在学业上是严师，在生活上则如慈父。当我感到懈怠时，郭老师鞭策我；当我稍有进步时，郭老师鼓励我。正是由于郭老师的悉心指导，我才顺利完成了博士论文写作。郭老师的为学之道、处世之道、他和师母的持家之道都堪称楷模，将是我一生的精神财富。

感谢哲学系专业课老师潘世墨教授、徐梦秋教授、陈嘉明教授，感谢哲学系其他老师。诸位老师以人品、学识、智慧酝酿出浓郁的哲思氛围，令人回味无穷。

感谢同学江峰、王刚、毕文胜、陈玲、吴凯伟、郑元景、徐朝旭、林俊雄、廖志丹、张慧远、曾炜琴。感谢师兄谢清果博士、黄胜辉博士、曹剑波博士。感谢师弟师妹刘明建、王巧惠、吴鸿雅。各位学友的情谊，我将永志难忘。

此外，还要特别感谢爱妻高明磊和父亲刘为满。在这三年中，正是爱妻的默默奉献，全力支持；正是在农村生活的老父身体健康，不需要我们赡养，我才能安心于学，并顺利完成学业。

最后，祝厦大哲学系在詹石窗教授的带领下，欣欣向荣！也愿我们的事业蒸蒸日上！